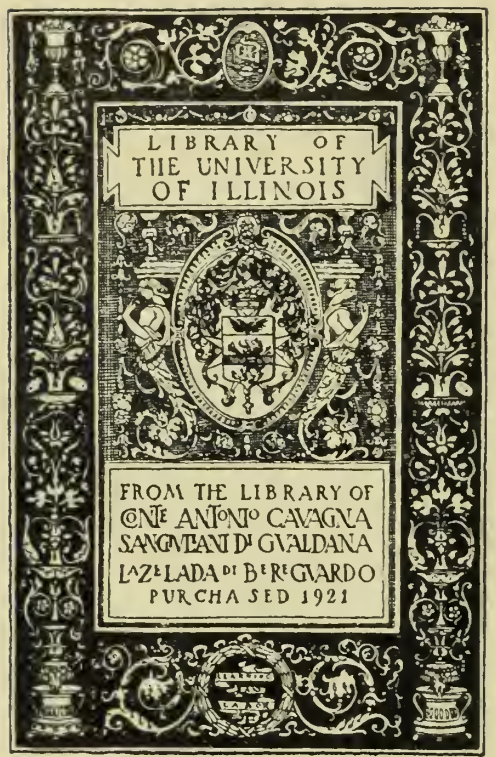


Rare Book & Special
Collections Library
532.5
R 26 u
1804

Digitized by the Internet Archive
in 2011 with funding from
University of Illinois Urbana-Champaign

http://www.archive.org/details/usodellatavolapa00regi

USO

DELLA

TAVOLA PARABOLICA

PER

LE BOCCHE D'IRRIGAZIONE

DI

FRANCESCO MARIA DE-REGI G. R. B.

Edizione

Corretta, ed accresciuta sulle memorie lasciate dall' Autore
con nuove aggiunte.

DEDICATA

AL VICE-PRESIDENTE
DELLA REPUBBLICA ITALIANA.

1804.

MILANO, NELLA TIPOGRAFIA DI GIUSEPPE BORSANI, E COMP.
Corso di Porta Orientale num. 637.

532,5
R26LL
1804

AL CITTADINO

FRANCESCO MELZI D'ERIL

VICE-PRESIDENTE

DELLA REPUBBLICA ITALIANA.

Che dalla ben ripartita, e ben condotta irrigazione traggano le nostre terre la lor principale fecondità, e noi lo veggiamo per felice esperienza, e l'ammiriamo, invidiando pur gli stranieri, che in questa parte d'industria non han saputo peranche agguagliarci. Quindi è che di sommo pregio sono per noi da riputarsi tutte quelle opere, che maggiormente concorrono alla perfezione d'un' arte a noi sì proficua e vantaggiosa. Tale si è quella d'un benemerito nostro Concittadino, che sotto i felici vostri auspicj abbiam l'onore di riprodurre, ridotta a miglior forma dall' egre-

gio Autore negli ultimi anni del viver suo con diverse correzioni, e variazioni opportune, e corredata di utili aggiunte, che da altre persone nella scienza dell' acque espertissime ci sono state generosamente fornite. Nè già ad altri meglio, e più convenientemente da noi dovevasi consecrare quest' Opera, che a Voi, il quale e per ufficio dell' alto grado che occupate, e per generosa propensione del benefico animo Vostro tutte le vostre cure tenete incessantemente rivolte alla maggiore prosperità dello Stato alla saggia Vostra amministrazione affidato. Piacciavi di gradire e questo umil tributo dell' ossequio nostro riconoscente, e i nostri voti sinceri per la perpetua vostra felicità.

Salute, e Rispetto

Gli Editori

PREFAZIONE DEGLI EDITORI

CON UN EPILOGO SULLA VITA DELL' AUTORE.

Quest' opera sull' uso della Tavola Parabolica, nel suo primo uscire fu tanto applaudita, che in breve tempo divenne rarissima; ed è già lunga serie d'anni, che il Pubblico ne desiderava in vano una nuova edizione. Mossi noi dal desiderio comune, ed anche dalle particolari istanze di molti de' nostri Periti ci siamo a questa nuova edizion risoluti; ed avendone tenuto discorso col P. Ferrari che, già un tempo, fu scolaro del N. A., ed ora nella catedra stessa di Matematica gli è successore, fummo avvertiti che l'Autore istesso, mentre era ancor in vita, ne ideava una ristampa, e che oltre ad alcune correzioni sul conteggio numerico fatte di propria mano nel margine dell' Opera, avea anche aggiunte molte altre cose sulle quantità d' acqua relative, che sgorgan dalle bocche triangolari, e circolari; sull' aumento d'acqua che si ha dalle bocche in quello spazio di tempo in cui le roggie, per temporanea comunicazione d' influenti pervengono alla loro massima o menoma altezza. Di tutte queste correzioni, ed aggiunte il prelodato Professore si compiacque di comunicarci l' originale.

Anzi poichè il N. A. in tutta l' opera sua limita i suoi calcoli alle sole bocche del Milanese e Mantovano, prestossi egli a stenderli, con un suo Supplemento, anche sulle altre Provincie della nostra Repubblica, nelle quali le sezioni fondamentali, che si adopran per la misura delle acque sgorganti, e che tra noi si chiamano once, o quadretti son regolate (come nel Milanese e Mantovano) dalla sola forza premente. Prestossi pure ad aggiugnere nello stesso Supplemento la formola analitica per le quantità d' acqua erogate da qualsivoglia sezione sotto qualsivoglia altezza d' acqua premente, facendone poi una particolar applicazione a quelle bocche che il N. A., da quel grande Geometra che era, alla sola sintesi avea sottoposte.

Qual compiacenza non si sente mai piovere un Idraulico in seno ove con perfetto accordo ravvisa sintesi e analisi, combinarsi a confermare quelle verità di cui industriosamente va in traccia! Oltre a ciò se la sintesi ha sopra l' analisi il pregio di metterci più chiaramente sott' occhio i fondamenti su cui la verità s' appoggia, l' analisi in contraccambio ha sulla sintesi quest' altro vantaggio, che essendo d' indole più maneggevole ci riesce assai più comoda per l' applicazione alle cose di pura pratica.

Il N. A. alla fine della sua opera aggiunse la Tavola Parabolica del P. Grandi, che ne' decimali tien conto de' soli centesimi. Trattandosi di cosa che non è parto del N. A. ci siamo creduti in piena libertà di cambiarla, essendoci sembrato che i soli centesimi siano al bisogno troppo scarsi. Ve ne abbiamo pertanto sostituita un' altra coi decimali a cinque ciffre, l'ultima delle quali è la più prossima al vero; e così ci lusinghiamo di avere soddisfatto pienamente non solo al desiderio di qualsivoglia regolatore economo delle acque, ma anche alla fantasia de' più severi, e rigidi possessori, che non s'accontentan mai de' Periti, se non quando l' esattezza è portata allo scrupolo. Cinque ciffre decimali bastan sicuramente anche per questi. (*a*)

Alla suddetta Tavola Parabolica ne abbiamo aggiunte due altre, in una delle quali con altrettanti decimali, si trovano distinte le radici, e i prodotti di queste nelle altezze principiando da un punto, e giungendo per punti successivi sino alle once 30. Nell' altra trovansi marcati i decrementi successivi, che subisce una qualunque bocca regolare Milanese per la minorazione del battente, e luce libera principiando dall' altezza di once sei, e degradando a punto per punto sino alla totale estinzione della luce. (*a*)

Queste tre Tavole furono con somma diligenza costrutte dal nostro Concittadino Ingegnere Carlo Parea, il quale fu anch' esso nella Geometria scolaro del N. A., e scolaro che era da lui con senso di piacere rimembrato. Egli anzi per dare alle ceneri di tanto suo Institutore un più largo tributo della sua stima, e gratitudine si assunse l'incarico, non solamente d' inserir nell' Opera le correzioni lasciateci dall' Autore stesso; ma perchè l'autore ne' suoi calcoli non avea fatto uso che di due ciffre decimali, che sicuramente sono troppo scarse, rinovò a norma della propria Tavola tutto il conteggio dell' Opera.

Noi vi abbiamo pure inserito qualche cambiamento su i rapporti d' alcune nostre misure; imperciocchè questi rapporti essendo stati per ordine Governativo determinati con somma diligenza, e scrupolosità da più celebri Matematici, e Fisici della nostra Repubblica su i più perfetti modelli de' Dipartimenti ci è sembrato un defraudare il Pubblico, se si fosse continuato ad usare gli antichi; e noi siamo ben sicuri, che altrettanto avrebbe fatto il N. A. se fosse ancor vivente.

E' pure del prelodato Ingegnere il Supplemento secondo contenente varj problemi Idraulici, relativi alla quantità d' acqua smaltita da orificj sotto diverse altezze d'acqua premente, ritrovando la forma d' essi orificj, perchè le quantità erogate sieno proporzionali ad una funzione qualunque dell' altezza d' acqua sopra la sezione. Così pure alcune osservazioni sulle tavole di sopra nominate.

(*a*) Vedi il Supplemento II.

Finalmente a piè di pagina abbiamo aggiunte quà, e là alcune postille, che a maggior rischiarimento ci parvero opportune; e per distinguerle dalle altre, che sono dell' Autore abbiamo prefissa alle nostre l'abbreviazione N. E. nota degli Editori.

A compimento di questa ristampa ci è sembrato non potersi ulteriormente altro desiderare se non forse un metodo per la distribuzione interpolata delle acque, di cui il N. A. fa qualche cenno appena, e che pure si usa tra noi frequentemente. Noi protestiamo tutta la gratitudine ad un altro nostro Concittadino Ingegnere G. M., per averci favorito il nitido opuscolo, che si ritroverà alla fine intitolato dell' Orario, e l'obbligo nostro verso di lui riesce maggiore in quantochè lo dovette stendere trammezzo alle gravi sue occupazioni tanto pubbliche, come private.

In luogo d' elogj, che nelle opere le quali si ristampano profonder si sogliono a loro Autori abbiamo creduto soddisfar meglio al Pubblico, e nello stesso tempo ai doveri di ottimi Cittadini, col raccogliere in breve le notizie principali sulla

VITA DELL' AUTORE.

Francesco Maria de Regi milanese sortita avendo dalla natura un' anima amante della concentrazione, e del ritiro, in età d' anni 17 vestì l'abito de' C. R. Barnabiti. Nell' anno di prova gli morì il padre; onde essendo egli figlio unico, ne diventò universale erede: suo padre, alla morte lasciati avea molti negozj ancor pendenti col pubblico; quindi il figlio fu costretto a interrompere il suo noviziato: ritornò a casa, terminò il più presto possibile i suoi negozj, fece un rispettabile assegno alla madre, dispose del resto in favore del Convitto detto allora imperiale; quindi ripigliando nuovamente l'intrapresa carriera professò nell' anno 1738, e immediatamente diè principio al corso degli studj di filosofia in S. Alessandro.

Eran già i superiori di quel Collegio entrati in pensiero d' aprire nelle loro pubbliche scuole una scuola di Matematica: or avendo in questo giovane studente ravvisata una penetrazion profonda nelle quistioni anche più astruse, fissaron sopra di lui l' attenzione; quindi il raccomandarono al celebre P. Rampinelli Olivetano, affinchè della di lui istruzione nelle scienze matematiche si volesse prender la cura: per due anni in circa il N. A., studiò sotto la direzione del prelodato celebre matematico.

Destinato poi, secondo il costume, allo studio delle scienze sacre passò da Milano a Pavia, ed ivi seppe coll' ingegno suo, e colla sua

assiduità distribuir per modo il tempo, che tenendosi negli studj sacri a livello de' suoi compagni, facea nello stesso tempo rapidi progressi nelle matematiche; laonde compiuto appena il corso triennale della Teologia, l'anno 1744 in età d'anni 24 egli il primo fu da' suoi superiori, col consiglio anche ed approvazione del celebre suo Institutor Rampinelli, trascelto in S. Alessandro, professore di Matematica.

Per molti anni servivasi egli in iscuola (per riguardo agli elementi di geometria) delle instituzioni geometriche del P. Grandi; ma in seguito sul metodo stesso del P. Grandi, del quale fu in tutto il tempo della sua vita grande ammiratore, compilò le instituzioni sue, e in lingua latina pubblicolle l'anno 1759, e a queste, facendosene una ristampa il 1772, aggiunse poi un nitido trattato di Trigonometria piana.

Sebben sulle pubbliche scuole non insegnasse, che gli elementi di Geometria, di Trigonometria piana, ed i principj del calcolo, privatamente però, quando trovava scolari di perspicace ingegno, e di volontà ferma, si prestava all'istruzione anche della geometria sublime, e de' calcoli più astrusi.

Oltre a queste istruzioni cotidiane facevasi egli carico di fare scuola separata ai giovani studenti della propria congregazione.

Ne' suoi insegnamenti, se egli non aveva il dono della facondia, avea però quello d'una precision nitida e chiara, e se non sapea tirare a se il cuore de' suoi scolari colla moltiplicità delle espressioni, legavaselo però in modo meraviglioso con quella sincerità di animo, che nella semplicità delle sue parole evidentemente si facea da ognun conoscere.

Egli fu quello che il genio delle Matematiche introdusse, ed ampiamente promosse nella sua Congregazione: era poi una delle sue compiacenze più grandi il vedere molti de' suoi scolari, tanto nella sua Congregazione, come al di fuori, stendere ne' campi spaziosi della Geometria, e del Calcolo rapidi i loro voli. Fra questi ci basti nominarne due, il cui nome è celebre in tutt'Europa, e fuori dell'Europa ancora. Uno è il Frisi, che da studente Barnabita in S. Alessandro (*a*) fu per tre anni suo scolaro, e che poi in età più matura per circostanze e di famiglia, e di pubblico impiego ne depose l'abito, conservandone però costante il primiero attaccamento; l'altro è l'abate Oriani attuale astronomo in Brera, ambidue nostri concittadini.

Le opere di sopra riferite, che il N. A. pubblicò, sebben diano a vedere un grandioso ragionatore non ci aprivan però il campo di potere in lui scorgere il genio inventore, che è quel solo che nelle scienze ci può collocare al primo rango. Ma il suo genio inventore già da

(*a*) Act. Coll. S. Alexandri ann. 1744, 45, 46, 47.

da' Matematici ravvisato si era in quell' opera grande, de' suoi Teoremi geometrici, che l'anno 1758 pubblicò indirizzata al più famoso, che allor vivesse, tra' nostri Ingegneri, ed amicissimo suo, Carlo Merli.

In quest' opera l'oggetto principale è di stabilire varie proporzioni, che hanno al cerchio i poligoni, ed alla sfera i solidi regolari inscrittivi, e che hanno tra-loro altri corpi regolari di figure diverse: determinansi pure le proporzioni reciproche tra le somme, e le differenze di varj rettangoli nel cerchio, e quindi si traggono lumi grandiosi pel famoso problema della trisezion dell' arco, nella soluzione del qual problema il genio si è sempre esercitato de' più gran Geometri.

Collo studio della Matematica pura congiunse egli quello della Matematica mista, la quale insegnava pure particolarmente a molti; e per ajutare in questa parte l' immaginazione de' suoi scolari, e per promoverne vieppiù tra' suoi il gusto, fornì a proprie spese il Collegio di S. Alessandro d' una supellettil copiosa di stromenti, e macchine di meccanica. Il suo genio però fissollo in particolar modo sull' Idraulica in cui s' acquistò appresso tutti altissima riputazione.

Eran negli anni 1760, 61, 62 insorte forti contestazioni tra 'l Governo Austriaco, e la Repubblica di Venezia per le bocche d'irrigazione sul fiume Tartaro, e dopo lunghi dibattimenti si venne in deliberazione di scieglière un perito per parte, che insieme con una delegazion governativa si portasse sul luogo della quistione, ed ivi con mutui Congressi si tentasse aggiustar le cose amichevolmente, e stabilmente. La corte di Vienna fissò l' occhio sul P. De Regi, e a lui spontaneamente conferì quell' onore, che molti altri ambirono, ma che egli non per altro motivo accettò, che per non sapersene sottrarre. Per ubbidire adunque ai comandi supremi si portò egli a Mantova, ove per molti mesi fece sua dimora; e dopo lunghe e replicate visite sul Tartaro e suoi diversivi, e dopo lunghi, ed all' indole sua concentrata e timida pesantissimi congressi, eseguì tanto virtuosamente e felicemente la sua incombenza, che l' Imperatrice Maria Teresa, in soddisfazione dell' operato, con suo diploma sottoscritto di propria mano in data dell' anno 1765 dichiarollo R. Matematico ed Idraulico con assegno annuo di lire due mille Mantovane, ingiungendoli però che nel tempo in cui si da l' acqua ai risi, egli trovar si dovesse sul Mantovano, affinchè l'irrigazione, regolata fosse a norma degli stabilimenti fatti ne' congressi antecedenti.

In queste circostanze fu, che chi a que' tempi in qualità di plenipotenziario presiedeva alla Lombardia Austriaca ingiunse al N. A. di pubblicare immediatamente il metodo per misurare le acque destinate all'irrigazione, applicandolo principalmente alle bocche del Mantovano, e l' ordine era tanto pressante, e tanto reiterate le istanze che il N. A. in breve tempo (vorrei quasi dire a penna corrente) compilò, ed a spese del Governo pubblicò l'opera sull' uso della Ta-

vola Parabolica, che fu con aggradimento universale da tutti gli intendenti accolta, e che noi presentemente corretta, ed accresciuta da lui stesso rimettiamo alla luce.

Ma il Matematico, sebben nel conteggio sia più degli altri illuminato, nella pratica però non è il più franco; ed ove si tratti di lunghe, ed intralciate supputazioni, ha bisogno di riandarle nell' ozio, e nella quiete. Questo realmente fu da lui praticato, onde in margine di quella copia stampata di cui egli facea uso trovansi di sua mano varie correzioni sul numerico conteggio.

Pensava anzi di farne egli stesso una ristampa, e a questo fine negli intervalli di tempo, che alle moltiplici occupazioni sue gli sopravanzavano dilucidò molti tratti, che gli sembravano di maggior dilucidazion suscettibili; aggiunsevi anche alcuni teoremi, e problemi sulle bocche triangolari e circolari, e sulle temporanee escrescenze o decrescenze delle roggie, come si può vedere negli ultimi due capi di questa nostra ristampa, i quali mancan nella prima edizione fatta vivente l' Autore.

Ma ritorniamo alle cose del Mantovano. Se egli non seppe trovar modo per sottrarsi alla prima, e principale incombenza d' esser parte, ed una delle parti principali all' accomodamento tra i due Governi, Austriaco e Veneziano, si sottrasse però in seguito dall' incombenza secondaria di vegliare al mantenimento degli stabilimenti concertati. Il N. A. aveva un' anima tanto aliena da' litigi, e da qualsivoglia genere di contestazioni, che il solo pericolo anche rimoto d'incontrarne, lo inquietava; laonde il timore di trovare nel regolamento del Tartaro infrante le convenzioni stabilite, ed essere perciò in obbligo di far proteste, e contestazioni gli suggeriva successivamente nuovi pretesti per farsi esentuare d'andare al tempo prefisso sul Mantovano. Ebbe alla fine dopo non molti anni, la sua giubilazione colla metà di stipendio.

Il Governo Austriaco molte altre volte servissi de' suoi talenti per affari idraulici; molte volte se ne servirono le varie Municipalità della Lombardia: senza numero poi furon le incombenze idrauliche a lui da varj particolari affidate, e possiam dire non esser nella Lombardia ex Austriaca fiume alcuno sul quale per commissione o pubblica o privata, egli non abbia dovuto stendere le sue viste. Lontano egli da ogni interesse, con occhio imparziale riguardava le ricerche de' Grandi e de' Piccioli, di buon grado prestava l' opera sua a tutti; colla condizion però sempre, ch' egli non avrebbe mai presa parte nelle contestazioni, e litigj che potessero sopravvenire.

Una sola volta (il che fece meravigliare chiunque avea cognizione del suo naturale) per la molta aderenza, che avea con un privato, s' indusse ad informare egli in persona i giudici. La quistione versava intorno alla fabbrica d'un ponte, che l'amico suo avea fatto costruire

su d' un fiume ; che non mi piace di nominare . Ora non sopravveniva inondazion nel seguito, che non ne fosse accagionato il ponte; e dai possessori adjacenti al fiume si venne in pretesa . che il ponte fosse demolito. Se ne cercò dall' amico il voto al N. A. ; esaminò egli attentamente gli andamenti del fiume , esaminò la posizione , e la struttura del ponte ; e 'l suo voto ragionato fu che il ponte non opponeva al corso del fiume alcuna resistenza ; e sembrava a lui d'avere dimostrata la cosa con tanta evidenza , che ognuno la dovesse conoscere . Ma le parti contrarie ne mosser lite giudiziale , ed avvicinandosi il tempo della sentenza previdesi che l' amico suo sarebbe stato condannato alla demolizione : allora fu , che egli e dall' amicizia insieme , e da un certo zelo di giustizia commosso , dimenticò il proprio naturale , ed in persona andò ad informare i Giudici . Ma il dono della facondia , come già abbiam di sopra accennato , non era il suo caratteristico : egli innanzi a' Giudici portava dimostrazioni tolte dai seni più reconditi della Geometria ; e i Giudici erano Legali , e non Geometri . La conchiusione fu che il ponte fin da' fondamenti fu demolito . Ma se il Tribunale degli uomini gli fece torto , glielo riparò un Tribunale senza paragone più sagro e augusto , voglio dire il Tribunale della natura . Demolito appena il ponte , il fiume per sopravvegnenza di pioggie si mise in piena , e portò tanta innondazione ai campi adjacenti che somigliante non se ne vide mai . Se negli affari idraulici , prima che a' giudizj diasi esecuzione , potessimo ricorrer sempre al Tribunal della natura , a quante sentenze emanate vedremmo noi derogarsi !

Ebbe il N A. molte ricerche anche dalle Potenze estere ; ma egli non piegossi che ad una , e ciò per le iterate istanze dell' Em. Borromeo nostro concittadino , allor legato pontificio di Ravenna , ove egli si portò l' anno 1770 per due importantissimi oggetti : 1 per migliorare l' unico mulino a quattro mole , che serve per tutta la città di Ravenna , e suoi sobborghi ; 2 per passar quindi a Rimini , e difendere quel porto da' copiosi interrimenti cagionativi dal fiume , o torrente Marechia , sopra de' quali interrimenti molto aveano già scritto i più celebri Matematici , che allor viveano . Egli con piena soddisfazione dell' una , e dell' altra Città eseguì ambedue le commissioni dall' eminentissimo legato affidategli.

Sebbene il suo nome fosse celebre e in Italia , e fuor d'Italia , non era però avido d' avere corrispondenza con molti letterati . I suoi più cari erano Francesco Maria Zanotti , e Sebastiano Canterzani , personaggi ambidue , quanto celebri per la grandezza de' loro talenti, altrettanto rispettabili per l' integrità della vita , e per le prerogative del cuore . Non ostante il di lui scarso commercio co' letterati fu fatto membro di varie illustri Accademie.

In mezzo a' suoi studj profondi, in mezzo alle incombenze pubbliche e private si mantenne sempre osservatore esatto, e rigido di quell' instituto, che ne' suoi verdi anni professato aveva. In altissima stima appresso tutti, egli solo era quello che poco conto facesse di se. Da' suoi Religiosi non cercò mai distinzione alcuna: parco ne suoi bisogni, sovvenne più volte col suo alle gravi urgenze di quel Collegio, di cui egli era parte, e parte assai grande. Nella sua Congregazione fu Consultore, Visitatore, Provinciale.

In età d' anni 74, piena la mente e il petto de' più sublimi concetti di nostra augusta religione, dopo breve malattia, morì con dispiacere universale della città, ma molto più de' correligiosi suoi, ciascun de' quali trovava in lui (oltre all' uomo illibato) un amico sincero, un consiglier provido, ed un amorevolissimo padre.

Ne' suoi manoscritti tralle altre opere di memoria degne lasciò un complesso di teoremi, e problemi geometrici, i quali formano come una continuazione all' opera già pubblicata de' teoremi geometrici.

Un trattato delle Sezioni coniche.

Un opuscolo sulla corrosion de' Fiumi. Tutte queste opere sono in latino.

Evvi poi in Italiano un numero grande di voti ragionati relativi a varie incombenze indrauliche da lui eseguite: la più parte di questi accrescerebbe pregio alla raccolta degli Autori che trattan del moto dell' Acque, ove una nuova edizion se ne volesse intraprendere.

DELLA MISURA
DELLE
ACQUE CORRENTI.

CAPO I.

La quantità d'acqua corrente, che passa per una qualunque luce, o bocca regolata, o per una qualunque sezione, può misurarsi con misura assoluta e relativa. Da che venga determinata generalmente una quantità d'acqua in qualunque sezione.

In due modi si può misurare la quantità d'acqua, che scorre per una bocca, o sezione, con misura assoluta, oppure con misura relativa. Misurasi nella prima maniera, quando si assegna la determinata quantità dell'acqua, v. gr. di sei barili, o di sei quadretti, che una data luce, o sezione in un dato tempo trasmette. Misurasi nel secondo modo, quando la quantità dell'acqua uscita da un lume, o da una bocca in un dato tempo si riferisce ad un'altra quantità d'acqua uscita nello stesso tempo, o in un altro tempo da un'altra luce, o bocca; e la prima di questa seconda si dice dupla, tripla, la metà, o in qualunque maniera una dell'altra moltiplice, o submoltiplice. La prima maniera di calcolare le quantità dell'acqua è più difficile; più piana la seconda; nulladimeno però non si tralascerà in seguito di computare la quantità dell'acqua ancora nel primo modo.

Intanto egli è certo, che per una data luce, o sezione maggiore quantità d'acqua scorre, quanto maggiore è il tempo, che dura a scorrere, quanto maggiore è la larghezza della luce, per cui l'acqua passa, quanto maggiore è l'altezza della luce, e finalmente quanto maggiore è la velocità, con cui l'acqua si muove. Per la qual cosa la quantità d'acqua, che passa per un dato lume, o sezione eguaglierà il numero, che nasce dalla moltiplicazione del tempo nella larghezza, nell'altezza della sezione, e nella velocità.

Quindi se una luce, o bocca sarà larga due once, alta tre, e per essa l'acqua durerà a scorrere per due minuti d'ora con una velocità come quattro, sarà la quantità d'acqua eguale a 2 moltiplicato per 3, per 2, per 4; cioè sarà eguale a 48; e se per un'altra bocca larga once quattro, alta sei, per tre minuti, con una velocità come sei scorrerà l'acqua, sarà la quantità di questa eguale a 4 moltiplicato per 6, per 3, per 6, cioè sarà eguale a 432. Onde la proporzione della quantità d'acqua scaricata dalla prima bocca alla quantità d'acqua, che passa per la seconda, sarà come 48 a 432; cioè la quantità dell'acqua prima starà alla quantità della seconda, come 1 a 9.

Dalla quale dottrina generale appare poi, che se i tempi, ne' quali l'acqua dura a scorrere per due sezioni saranno eguali, le quantità d'acqua diverranno come i prodotti delle rispettive larghezze, nelle rispettive altezze, e velocità; e se ancora le velocità saranno eguali, le quantità d'acqua risulteranno, come i prodotti delle rispettive larghezze nelle altezze; oppure saranno come le sezioni, o luci; e se le sezioni ancora riusciranno eguali, le quantità d'acqua saranno eguali. Le quantità d'acqua, che scaricano due luci, o sezioni possono riuscire in ventidue maniere diverse

eguali, come sarebbe quando il prodotto dell' altezza nella larghezza nel tempo d'una sezione, è al prodotto dell' altezza nella larghezza nel tempo d'un' altra sezione, come la velocità di questa seconda alla velocità della prima; o quando, supposti i tempi eguali, le velocità sono reciprocamente come le sezioni. Veggansi tutti questi modi nella Prop. 2 del Cap. 1 *del Movimento delle Acque* del P. Abate Grandi.

CAPO II.

In qual maniera si debba calcolare la velocità delle acque correnti.

Il computo delle quantità dell' acqua, che tramanda un lume, o una sezione in un dato tempo, dipende, come si è veduto nel Capo precedente, dalla durata del tempo, che l'acqua prosegue a sgorgare, dalla larghezza, e dall' altezza della sezione, e dalla velocità, della quale l'acqua stessa è dotata. Facile cosa è il determinare tanto il tempo, quanto la larghezza, e l'altezza della sezione; sebbene in varj casi sia necessario il ritrovare la media larghezza, e la media altezza di quella; ma altrettanto difficile è a determinarsi la velocità, con cui l'acqua passa per una bocca, o per una sezione qualunque. Il P. Abate Castelli, il Cassini, ed altri da alcuni esperimenti da esso loro fatti, dedussero essere le velocità nella proporzione dell' altezza dell' acque. Nella quale ipotesi, se l'altezza dell' acqua in una sezione è come uno, in un' altra sezione come due, e in una terza come quattro, ancora la velocità dell' acqua della prima sezione è come 1, della seconda come 2, e della terza come 4.

Il Torricelli, il Mariotte, il Guglielmini, ed altri per quella analogia, che passa tra l'acqua, che esce da un foro fatto nelle pareti laterali d'un vaso, e l'acqua, che scorre da una bocca, o sezione, hanno giudicato, che la velocità dell'acqua corrente debba calcolarsi nello stesso modo, nel quale si computano le velocità dell'acque uscenti da fori laterali, e premute da diverse altezze d'acque sovrastanti. Quindi siccome la ragione ci persuade, e le replicate costanti esperienze ci confermano essere le velocità dell'acque, che sgorgano da' fori de' vasi in ragione sudduplicata, o sia dimezzata dell'altezze dell'acqua, che stanno sopra de' fori, oppure come le radici quadrate di quest'altezze medesime, così hanno conchiuso essere ancora le velocità dell'acque correnti, che si scaricano da una, o più luci, ovvero sezioni, in ragione sudduplicata, o dimezzata dell'altezze dell'acqua, che alle soglie sovrasta. Se dunque, secondo questa ipotesi, l'altezza dell'acqua d'una luce sarà uno, d'un' altra quattro, e d'un' altra nove, saranno le velocità della prima 1, della seconda 2, e della terza 3, i quali numeri 1, 2, 3, sono in ragione sudduplicata, o dimezzata, o sia sono le radici quadrate de' numeri 1, 4, 9.

Il Sig. Zendrini fondando i suoi calcoli delle velocità su le osservazioni fatte nel Fiume Pò degli angoli di deviazione, e loro differenze da lui misurati con un pendolo sospeso ad un filo lungo sei piedi, e che esso immergeva in ogni osservazione cinque piedi, e d'indi successivamente quattro, tre, e due piedi, stabilisce una tavola dopo il §. 12 del Cap. 5 della seconda parte del libro intitolato *Leggi ec. dell'Acque correnti*, ove calcola, che se gli angoli di deviazione delle diverse immersioni del pendolo sono da sessanta gradi fino a quaranta colle differenze di dieci gradi per ciascuna im-

mersione, le velocità sono come le radici quadrate delle settime potenze delle altezze, non già attuali dell' acqua, ma prese, come da esso si dice, dal punto di quiete, e diremo noi, come le radici quadrate delle settime potenze delle altezze equivalenti. E se gli angoli di deviazione sono da sessantasei gradi a trentanove, o da sessantaquattro a quaranta, colle differenze di otto, o nove gradi, le velocità sono come i quadrati delle altezze. E se gli angoli di deviazione sono da sessanta a trentasei, o da cinquantanove gradi a trentadue, con differenza di otto in nove gradi, le velocità sono come le radici quadrate de' cubi delle altezze. E se gli angoli di deviazione sono da cinquanta gradi a trentacinque, da quarantotto a trenta, da quarantasette a ventinove, da quarantasei a ventotto, con differenze di cinque, o sei gradi, le velocità sono come le altezze. E se gli angoli di deviazione sono da quarantuno a ventinove, da quaranta a ventisette, da trentacinque a venti, da trentatre a diciotto, da trenta a quindeci, con differenza di quattro, o cinque gradi, le velocità sono come le radici cubiche de' quadrati delle altezze. E se finalmente gli angoli di deviazione sono da ventiquattro a quindici, da quindici a sei, e da cinque a due, con differenza d'un grado fino a tre, le velocità sono come le radici delle altezze.

Io non so bene determinare, che tutte queste proporzioni delle velocità all' altezze, e più altre ancora, abbiano egualmente luogo nell' acque correnti, come afferma il sig. Zendrini; tanto più, che esse dipendono da quelle osservazioni, che egli fece, quando intervenne alla visita del Fiume Pò nell' anno 1721, co' Matematici Pontificj, Cesarei, e Veneti, tra' quali eravi il Padre Abate Grandi, che nel Capitolo 6. del Lib. 1. del *Movimento dell' Acque* Prop. 41, dopo aver descritto

l'istrumento, di cui esso Sig. Zendrini si serviva per le sopradette osservazioni, attesta, che alle deduzioni, che esso fece da sì fatte osservazioni furono mosse varie eccezioni, e opposte varie ragioni dalle parti, sicchè fu stimato bene di non farne più precisa applicazione, e di non servirsene a conseguenza veruna, che richiedesse più esatto, e delicato squittinio.

Dirò dunque solamente, che il Sig. Zendrini accorda, che ne' Fiumi, i quali corrono lenti si debbono computare le velocità come le radici quadrate dell' altezze, con Guglielmini, Torricelli, ed altri. Dovendo noi pertanto calcolare in seguito le velocità di quelle acque, che servono per irrigare le terre, le quali lente debbono dirsi rispetto a' Fiumi, e sommamente analoghe all' acque, che escono da' vasi, potremo senza pericolo d'errare computarle come le radici quadrate dell' altezze dell' acqua.

CAPO III.

Quale sia la curva, a cui terminano tutte le velocità, che ha l' acqua nell' uscire da una luce, o da qualunque sezione.

È noto per esperienza, che le parti dell' acqua anche della stessa sezione non si muovono colla stessa velocità, ma che sempre minori sono più vicino alla superficie, e maggiori quanto più s' accostano al fondo: se non accade alcuna volta altrimenti per la troppa resistenza, che faccia l' asprezza del fondo medesimo al corso dell' acqua. La quale verità potrebbe ancora dimostrativamente provare, siccome viene dimostrata dal

Gugliemini nella Prop. 3. del Lib. 2 della *Misura delle Acque* per i canali inclinati, e nella Prop. 2. Lib. 3. dello stesso trattato per i canali orizzontali. Ragionevolmente dunque cercasi a qual curva terminino tutte queste velocità ineguali, poichè da questa cognizione dipende il modo di ridurle a calcolo, e d'indi di determinare la quantità d'acqua, che in un dato tempo passa per una sezione, la quale quantità d'acqua, che in un dato tempo passa per una sezione, tanto è maggiore, o minore, quanto più cresce, o si diminuisce la velocità, da cui l'acqua è spinta.

Sia pertanto la linea retta OQ (Fig. 1) la perpendicolare d'una sezione, e insieme l'altezza dell'acqua della sezione medesima, e si supponga, che la particella d'acqua in O, cioè nella superficie, stia ferma senza velocità, e che successivamente le particelle d'acqua in N, F, ec. si muovano con maggior velocità, secondo che più s'avvicinano al fondo. Egli è certo, che se la particola d'acqua in N in un dato tempo scorrerà lo spazio NX, quella, che è in F più veloce nello stesso tempo passerà lo spazio FH, e quelle, che sono in T, S, Q ancora più veloci nel tempo medesimo si trasferiranno per gli spazj TZ, SV, QR; dunque la curva, a cui termineranno gli spazj NX, FH, TZ, ec. fatti dall'acqua nello stesso tempo, i quali sono come le rispettive velocità, sarà la curva OXZR.

Ma per determinare di quale specie sia una tal curva, egli è d'uopo di fissare la proporzione, che si ha tra le altezze ON, OF ec. dell'acqua, e gli spazj nello stesso tempo scorsi, o siano le velocità NX, F H ec. Già si è detto nel Capo precedente, che le velocità dell'acque correnti ordinate ad irrigare le terre si possono giustamente calcolare, come le radici quadrate delle rispettive altezze. Ciò dunque supposto, si chia-

mino le porzioni dell'altezze dell'acqua prese dal punto O, cioè l'altezze ON, OF, OT, ascisse, e gli spazj, o siano le velocità dell'acqua medesima NX, FH, TZ, ordinate: perchè dunque le velocità sono come le radici quadrate dell'altezze, sarà la radice quadrata dell'ascissa ON alla radice quadrata dell'ascissa OF come l'ordinata NX all'ordinata FH, e la radice quadrata dell'ascissa OF alla radice quadrata all'ascissa OT come l'ordinata FH all'ordinata TZ, e così sempre sarà la proporzione delle ascisse alle ordinate. Quindi sarà ancora l'ascissa ON all'ascissa OF come il quadrato dell'ordinata NX al quadrato dell'ordinata FH, e l'altre ascisse saranno nella stessa proporzione ai quadrati dell'altre ordinate. Ma questa è la proprietà essenziale della Figura, che Parabola da' Geometri si chiama. Dunque la curva, ove terminano tutte le velocità dell'acqua della perpendicolare QO, è la curva Parabolica RZXO.

Se la perpendicolare della sezione fosse la linea QN, e la particella d'acqua, che trovasi in N non fosse ferma, e senza moto, come si è precedentemente supposto, ma fosse dotata della velocità, per cui in un dato tempo potesse scorrere lo spazio NX, egli è certo, che una tal velocità dovrebbe intendersi prodotta da una qualche forza, e che questa forza potrebbe supporsi equivalere all'altezza d'acqua ON, che sovrastasse alla particella d'acqua, che sta in N, e colla sua pressione producesse quella velocità, per cui atta si rende a trasferirsi in un dato tempo per lo spazio NX; quindi prodotta la curva RX fino in O, collo stesso discorso di prima si proverebbe essere la curva RXO parabolica, ed essere la porzione d'essa RX quella, a cui terminano tutte le velocità della perpendicolare QN della sezione.

Che

Che se in luogo d'essere data la sola perpendicolare QN della sezione, fosse data l'intera sezione EBHL (Fig. 2) questa potrebbe risolversi in tutte le sue perpendicolari EL, NQ, BH. Le velocità dunque di ciascuna perpendicolare, per il precedente discorso, terminerebbero alle curve intere delle Parabole descritte su le stesse perpendicolari EL, NQ, BH, se le particole d'acqua in E, N, B fossero senza velocità, e terminerebbero alle parti di curva Parabolica TX, RX, SX, quando esse particelle E, N, B avessero alcuna velocità. È egli dunque manifesto, che in una curva parabolica terminano tutte le velocità dell'acque uscenti da una bocca, o sezione qualunque.

Ma poichè la Parabola intera QOR (Fig. 1) in se racchiude tutto l'aggregato delle velocità ineguali della perpendicolare QO, supposta l'acqua in O senza moto, e la porzione della Parabola QNXR, che Trapezio Parabolico si può appellare, contiene tutte le velocità ineguali della perpendicolare QN, nell'ipotesi, che l'acqua in N abbia moto, potrà la Parabola intera QOR chiamarsi complesso delle velocità, o scala delle velocità della perpendicolare QO, e il Trapezio Parabolico QNXR complesso delle velocità, o scala delle velocità della perpendicolare QN. Non altrimenti potranno chiamarsi complesso delle velocità, o scala della velocità della sezione EBHL (Fig. 2) la somma delle Parabole fatte su l'altezze EL, NQ, BH, quando le particole d'acqua E, N, B sono in quiete, e la somma de' Trapezi Parabolici ELTX, NQRX, BHSX, quando le particole medesime hanno moto.

CAPO IV.

In qual maniera per mezzo delle Parabole, o de' Trapezi Parabolici, che sono il complesso, o la scala delle velocità, si possa computare la quantità d'acqua, che passa per una sezione.

Dimostrano i Geometri, che qualunque Parabola agguaglia sempre due terzi del rettangolo circoscritto. Così lo spazio parabolico QOR (Fig. 3) agguaglia due terzi del rettangolo circoscritto OQRP, e lo spazio Parabolico NOX agguaglia due terzi del rettangolo circoscritto NOSX. Prendendo dunque QM eguale ad OA, eguale a due terzi di tutta QR, e congiungendo MA, il rettangolo OQMA, che è due terzi del rettangolo QOPR riesce eguale alla Parabola QOR. Da una tale verità si fa manifesto, che la Parabola QOR, la quale è la scala delle velocità ineguali della sezione QO, agguaglia il rettangolo OQMA, il quale può dirsi parimente la scala delle velocità della stessa sezione, poichè la somma delle ordinate du, NX, CB, LI, QR della Parabola rappresentanti le velocità ineguali della sezione QO agguaglia la somma delle ordinate eguali OA, dG, CB, LT, QM del rettangolo OQMA, siccome appare se dal rettangolo OQMA, e dalla Parabola OQR, si toglie la parte comune OBMQ, che rimane OBA, eguale ad MBR, e per conseguenza tutti i diffetti uG, XE delle velocità du, NX dalle velocità costanti OA, dG, CB, vengono compensati dagli eccessi TI, MR delle velocità LI, QR, sopra le velocità medesime eguali OA, CB, LT.

E quindi ne nasce, che la velocità OA, CB eguali possono considerarsi come quella velocità media tra le

minori, e le maggiori della scala Parabolica, colla quale, se si movessero tutte le parti dell' acqua della perpendicolare QO, tanta quantità d' acqua appunto per essa si scaricherebbe in un dato tempo, quanta nel medesimo tempo ne uscirebbe colle velocità ineguali d u, NX ec. Ma se la velocità CB, oppure OA, o QM fosse la velocità costante, con cui si movessero le parti tutte dell' acqua della perpendicolare QO sarebbe la quantità d' acqua, che in un istante di tempo trasmetterebbe la sezione QO eguale a QO moltiplicata per CB, oppure OA, o QM, cioè sarebbe eguale al rettangolo OQMA, poichè la quantità d' acqua agguaglia il prodotto del tempo nella velocità, e nella sezione; dunque essendo il rettangolo OQMA eguale alla Parabola QOR, sarà ancora la quantità d' acqua trasmessa in un istante di tempo dalla sezione QO eguale alla Parabola QOR.

Se la perpendicolare della sezione fosse QN, e l'acqua in N affetta di velocità, sicchè la scala delle velocità di questa perpendicolare fosse il Trapezio Parabolico QNXR allora siccome la Parabola intera QOR agguaglia due terzi del rettangolo circoscritto OQRP, e la porzione di Parabola NOX agguaglia due terzi del rettangolo circoscritto ONXS, così il Trapezio Parabolico QNXR, che è la differenza tra le due Parabole QOR, NOX agguaglierebbe due terzi della differenza tra i rettangoli OQRP, ONXS, i quali due terzi sarebbero eguali ad un rettangolo, la di cui altezza sarebbe la perpendicolare stessa QN della sezione, e la larghezza la velocità media, con cui si scaricherebbe in qualunque istante di tempo per QN la stessa quantità d' acqua, che per essa scaricasi colle velocità ineguali; ma un tale rettangolo, che è il prodotto della velocità media nella sezione QN sarebbe la quantità d'acqua, che scorre per QN in un' istante di tempo, dunque ancora

il Trapezio QNXR eguale a questo rettangolo farà la quantità d'acqua, che in un istante di tempo tramanda la perpendicolare QN della sezione.

Dalle quali cose spontaneamente nasce, che data la sezione ELHB (Fig. 2), e supposte le Parabole intere eguali descritte su le perpendicolari EL, QN, HB, oppure gli eguali Trapezj Parabolici ELTX, NQRX, BH SX, la quantità d'acqua nel primo caso, che sgorga in un' istante di tempo per la luce ELHB, sarà eguale alla Parabola descritta su l'altezza QN, moltiplicata per la larghezza LH della sezione, e nel secondo caso sarà eguale al Trapezio Parabolico NQRX moltiplicato per la larghezza medesima LH della sezione; poichè nell' uno, e nell'altro caso la Parabola, e il Trapezio Parabolico sono il prodotto dell' altezza della sezione nella velocità, i quali moltiplicati per la larghezza della sezione danno la quantità d'acqua, che esce in un istante di tempo, e che agguaglia la velocità moltiplicata per la sezione. È egli dunque manifesto da ciò, che si è detto in qual modo per mezzo delle scale delle velocità si debbano calcolare le quantità d'acqua che scorrono per una sezione.

CAPO V.

Comporre una Tavola, chiamata Parabolica, assai comoda per calcolare le quantità dell' acqua.

Si divida questa Tavola che è stata composta dal P. Abate Grandi, in tre colonne. La prima contenga la serie naturale aritmetica de' numeri stesa da 1 fino a 2000, e s' intitoli *Altezze*. Nella seconda vi sieno tutte le radici

quadrate delli stessi numeri naturali con cinque cifre decimali, l'ultima delle quali la più prossima al vero, e dicasi *Radici*. La terza sia il prodotto di ciascun numero naturale nella sua radice quadrata, e si nomini *Prodotti*. Una sifatta Tavola si porrà tutta distesa alla fine di quest' operetta per comodo di chi se ne vorrà servire, avvertendo che le cifre decimali delle radici, e de' prodotti verranno separate da numeri interi da una virgola, così 6,55744 vorrà dire $6\frac{55744}{100000}$ radice quadrata di 43, e 281,96992 vorrà dire $281\frac{96992}{100000}$, prodotto di 6,55744 per 43.

Ma per far buon uso di questa Tavola nel calcolare le acque, egli è duopo avvertire, che ciascuna Parabola ammette una linea costante, la quale dicesi da' Geometri Parametro, o lato retto. La proprietà principale di questa linea costante si è, che moltiplicata essa per qualunque ascissa della Parabola, fa un rettangolo eguale al quadrato della corrispondente ordinata. Così nella Parabola BAD (Fig. 4), il di cui Parametro sia la linea M, il rettangolo di BE in M agguaglia il quadrato EF, il rettangolo di BG in M agguaglia il quadrato GH, e così sempre. Dalla qual cosa ne viene poi, che se l'altezza BA della Parabola venga divisa in parti eguali BE, EG, GL, LA, sicchè l'ascissa BE sia (1), BG (2), BL (3), BA (4), e si supponga il Parametro M eguale ad una delle particelle dell' altezza BA, allora il rettangolo del Parametro M in BE, cioè di 1 in 1 è eguale al quadrato EF eguale ad 1, e la linea EF eguale a 1 radice quadrata di 1, così il rettangolo del Parametro M in BG, cioè di 1 in 2, è eguale a 2, è eguale al quadrato GH, cioè a 2, e la linea GH agguaglia la radice quadrata di 2, e così sempre di maniera, che tutte le ordinate EF, GH, LI sono

le radici quadrate delle rispettive altezze BE, BG, BL. Ora la Tavola Parabolica proposta, calcola per l'appunto le Parabole, supponendo, che esse abbiano per Parametro una particella della sua altezza. E siccome tali sono le Parabole, che fa l'acqua, che esce da un lume, o sezione, le quali hanno per Parametro una particella di quelle, in cui è divisa l'altezza della Parabola; poichè l'altezza della Parabola fatta dall'acqua non è altro, che quell'altezza dell'acqua medesima, che attualmente produce colla sua pressione, o è atta a produrre quella velocità, che hanno le diverse parti dell'acqua della sezione medesima, e le ordinate non sono altro, che le velocità dell'acqua, le quali abbiamo superiormente detto, che debbano calcolarsi, come le radici delle altezze dell'acqua, da cui sono prodotte, o possono prodursi; quindi è, che la Tavola Parabolica è opportunissima per calcolare le acque.

Nè altro vi vuole, se non che riconosciuta l'altezza dell'acqua in una sezione, da cui deriva la velocità dell'acqua medesima della sezione, in qualunque misura, o d'once, o di braccia, o di piedi ad arbitrio del Misuratore, quest'altezza, o questo numero si ricerchi nella colonna delle altezze della Tavola, che accanto a questa nella colonna delle radici ritroverassi la velocità competente ad una tale altezza, e parimente accanto de' primi due numeri nella terza colonna de' prodotti si troverà il prodotto dell'altezza nella velocità, che agguaglia il rettangolo circoscritto alla Parabola della data altezza, e di cui due terzi sono la Parabola medesima, che da la quantità d'acqua.

Così se fosse per esempio BA (Fig. 4) l'altezza dell'acqua d'una sezione, e fosse once 4 di misura, cercando nella colonna delle altezze della Tavola il numero 4, troverebbesi accanto a questo nella colonna

delle radici il numero 2,00000, cioè once 2 senz'alcun centesimo, che indicherebbe la velocità dovuta a quest' altezza, la quale sarebbe la linea AD, e nella colonna de' prodotti il numero 8,00000, cioè otto once, che sarebbe il rettangolo BADC circoscritto alla Parabola ABD, due terzi del quale agguagliano la stessa Parabola BAD Quindi la Parabola BAD sarebbe once $5\frac{1}{3}$; e tanto sarebbe quel velo d'acqua, che in un istante di tempo uscirebbe per la perpendicolare AB d'una sezione, siccome appare da ciò, che nel Capo precedente si è detto.

CAPO VI.

Uso della Tavola Parabolica nella misura dell' acque correnti, che servono per irrigare i terreni.

È comune costumanza pressochè d'ogni Paese per distribuire le acque destinate all' adacquamento de' Terreni, di servirsi d'una luce, o di una bocca d'una determinata misura, che viene poi chiamata col nome di oncia, o quadretto, o con altro simile nome.

I Signori Periti Milanesi usano una luce, che ha d'apertura once 3 del braccio Milanese in larghezza, once 4 in altezza, e di più ha due once d'altezza d'acqua appoggiata al lembo superiore della bocca, che essi chiamano Battente. E una tal bocca con sì fatta altezza d'acqua superiormente alla sua apertura da loro viene detta un' oncia d'acqua Milanese. E li Signori Periti Mantovani si servono per la distribuzione dell' acque d'una bocca quadrata d'un braccio Mantovano di larghezza, e d'altezza, alla quale essi pure danno due

once d'acqua di Battente, che da loro viene chiamata un Quadretto d'acqua Mantovano.

Di queste due bocche dunque noi calcoleremo la quantità d'acqua, che in un dato tempo scorre per mezzo della Tavola Parabolica per far uso di questa. Ma poichè tali bocche diversissime quantità d'acqua possono tramandare nello stesso tempo, secondo il diverso sito, ove esse sono poste rispetto al canale, che alle medesime somministra l'acqua; secondo la velocità dell' acqua, che per le bocche passa, o proveniente dall' attual altezza dell' acqua sovrastante alle soglie, o da qualche altra altezza equivalente; secondo la pendenza del canale, che immediatamente riceve l'acqua dalle luci, la quale per essere troppa acceleri il passaggio dell' acqua dalle luci medesime, o per iscarseggiare la rigurgiti; per ora supporremo, che questi lumi sieno situati nelle sponde del canale di deviazione, in luogo dove le velocità dell'acqua, che per questi passa nasca dalla pressione dell' acqua, che sta sopra le soglie, e dove l'acqua cade dalle luci in un canale assai basso, il quale per conseguenza non possa colla troppo smoderata, o troppo scarsa sua pendenza alterare il corso dell' acqua proveniente dalle luci.

Sia pertanto CABD (Fig. 5) l'apertura dell' oncia Milanese, e sieno AEFB le due oncie d'acqua, che formano il Battente, sarà l'altezza dell' acqua CE sovrastante alla soglia CD once 6. Si cerchi tra l'altezze della Tavola Parabolica il numero 6, e tra prodotti della stessa Tavola accanto del 6 si veda qual prodotto gli corrisponda; e sarà il prodotto 14, 69694. Si prendano due terzi di questo prodotto, cioè 9, 79796, che essi saranno eguali alla Parabola dell' altezza 6. Questa Parabola 9,79796 moltiplicata per la larghezza CD d'oncie 3, che da il prodotto 29, 39388, sarebbe la quantità

d'acqua

d'acqua che darebbe la data luce, se l'apertura fosse CEFD, e non la sola CABD. Perchè dunque l'apertura della bocca è solamente CABD, e l'acqua AEFB che forma il battente colla sua pressione rende bensì più veloce l'acqua inferiore, che passa per la luce, ma essa è impedita a passare; egli è d'uopo per avere la giusta quantità d'acqua che tramanda la luce CABD di sottrarre dalla Parabola 9,79796 moltiplicata per 3 la Parabola dell'altezza AE d'once 2 parimenti moltiplicata per 3, che il residuo sarà la quantità d'acqua che esce dalla luce CABD. Si trovi dunque il numero 2 nelle altezze della Tavola Parabolica, e ne' prodotti di questa il numero 2,82842, e di questo si assumano i due terzi 1,88562, che saranno eguali alla Parabola dell'altezza AE d'once 2. Si moltiplichi, 1,88562 per 3, e si avrà 5,65686, che sarà quantità d'acqua AEFB sovrastante alla luce, e che non passa per la medesima. Si sottragga 5,65686 da 29,39388, e resterà 23,73702 per la quantità dell'acqua che dà l'oncia Milanese. Per fare lo stesso conto basterà ancora prendere la differenza della Parabola dell'altezza CE d'once 6, dalla Parabola dell'altezza AE d'once 2, la qual differenza sarà il Trapezio Parabolico, e questo moltiplicarlo per la larghezza CD della sezione. Eccone il Calcolo:

CALCOLO.

Altezza CE once 6. Prodotto 14,69694 Parabola 9,79796
Altezza AE once 2. Prodotto 2,82842 Parabola 1,88562

Trapezio Parabolico 7,91234
Larghezza CD 3

Quantità d'acqua dell'oncia Milanese once cubiche Milanesi - - - - - - - - - 23,73702

Sia ora la luce ABCD (Fig. 6) il Quadretto Mantovano, e la porzione AEFD il Battente di 2 once. Per

calcolare la quantità d'acqua, che esso tramanda per mezzo della Tavola Parabolica si usino le stesse premesse regole.

CALCOLO.

Altezza BE once 14. Prodotto 52,38320 Parabola 34,92214
Altezza AE once 2 Prodotto 2,82842 Parabola 1,88562

Trapezio Parabolico 33,03652
Larghezza BC 12

Quantità d'acqua del Quadretto Mantovano, once cubiche Mantovane - - - - 396,43824

Dal modo usato nel calcolare per mezzo della Tavola Parabolica le due superiori bocche, egli è dunque generalmente manifesto, che ogni qualvolta per una bocca qualunque passerà l'acqua per sola pressione dell'acqua sovrastante alla soglia, nel qual caso l'acqua nella superficie; come sarebbe EF (Fig. 5 e 6) deve essere ferma, e non vi saranno cagioni, che accelerino, o ritardino il passaggio dell'acqua per questa, la quantità d'acqua, che essa bocca trasmetterà, sarà la parabola intera dell'altezza dell'acqua, che sta alla bocca moltiplicata per la larghezza della bocca medesima, se non vi sarà acqua, che formi il Battente, e se vi sarà Battente, la medesima quantità d'acqua sarà la differenza, che evvi tra la Parabola dell'altezza dell'acqua, compresa l'acqua del Battente, e la Parabola fatta su la stessa altezza del Battante moltiplicata per la larghezza della bocca. La quale differenza tra le due Parabole dette è poi un Trapezio Parabolico. Onde ancora questo Trapezio Parabolico moltiplicato per la larghezza della bocca ci somministrerà la medesima quantità d'acqua.

$\frac{ad \times \text{altezza se}}{2 \cdot 3}(3rb + ar)$

$ar = ab - rb$

$\frac{ad \times \text{altezza se}}{2 \cdot 3}(3rb + ab - rb)$

$\frac{ad \times \text{altezza se}}{2 \cdot 3}(2rb + ab)$

$rb = ef + ar$

$\frac{ad \times \text{altezza se}}{2 \cdot 3}(2(ef + ar) + ab)$

$2ef + 2ar = ef + ef + 2ar$

$\frac{ad}{2} \times \text{altezza se} \times \left(\frac{ef + ef + 2ar + ab}{3}\right)$

ma $ef + 2ar = ab$ = lato opposto ab della stessa base ed ef è lo spig. superiore

dunq.

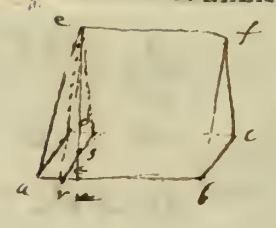
solidità cavalla $= \frac{ad}{2} \times \text{altezza se}\left(\frac{ab + dc + ef}{3}\right)$

antità
i essa
pres-
bocca.

mpre
ssero
supe-
rebbe
rebbe
che
nente
Una
quale
a su-
plan-
d'a-
un
tuale
tutta
ave-
ezza
è la
ces-
qua
ssa
at-
per
ra-
che

calcolar
mezzo
messe

Altezza
Altezza



$ef = a$
$ad = b$
$ab = c$
$ar = d$
$es = s$

0,585 : 1 [illegible] = 0,5
0,09

0,09

100,00

585 : 533

$ad \times ar$ = area base piramide

$ad \times ar \times \frac{es}{3}$ = solidità piramide

1 di 7

$2 \cdot b \cdot d \cdot \frac{s}{3}$ = solidità delle due piramide

585 = 1.

Il prisma restante sarà $= \frac{ad \times es}{2} \times (c - 2d)$

$= \frac{b \times s}{2}(c - 2d) = \frac{bcs}{2} - bsd$

Perciò solidità cavalla $= \frac{2bds}{3} + \frac{bcs}{2} - bsd$

$= \frac{4bds + 3bcs - 6bsd}{2 \cdot 3} = \frac{3bcs - 2bds}{2 \cdot 3}$

a mancare

$= \frac{bs(3c - 2d)}{2 \cdot 3}$ 0,585 : 1 [illegible] 0.5

0,53

$= \frac{ad \times \text{altezza } se\,(3 \cdot ab - 2 \cdot ar)}{2 \cdot 3} = \frac{ad \times \text{altezza } s}{2 \cdot 3}$

$(3ar + 3rb - 2ar) = \frac{ad \times \text{altezza } se}{2 \cdot 3}(3rb + a$

$= \frac{ad \times ab \times \text{altezza } se}{2 \cdot 3}$ $\frac{ad}{2} \times \text{altezza } se \times \frac{ab}{3}$

$rb = ab - ar$

$= \frac{ad \times \text{altezza } se}{2 \cdot 3}(3ab - 3ar + ar) = \frac{ad \times \text{altezza } se}{2 \cdot 3}$

Q
vano,
D
vola I
genera
ca qu
acqua
superf
ferma
tardin
d' acq
intera
plicat
vi sa
tente
che
pres
stess
dell
dett
sto
dell

CAPO VII.

Uso della Tavola Parabolica per misurare la quantità d'acqua di una luce, quando la velocità, di cui essa acqua è affetta, ha altra origine da quella della pressione dell'acqua sovrastante alla soglia della bocca.

Se la velocità dell'acqua corrente riconoscesse sempre l'origine sua dalla pressione, sicchè tanto si movessero le parti inferiori dell'acqua, quanto premono le superiori, seguirebbe che l'acqua in superficie, o avrebbe nessun moto, o avrebbe quel moto solo, che potrebbe venirle comunicato dalle parti inferiori del fluido, che seco strascinassero le superiori, poichè superiormente alla superficie, non v'è altra acqua, che prema. Una tal cosa però non è conforme all'esperienza, la quale anzi c'insegna essere molte acque correnti nella sua superficie assai veloci. Errerebbesi pertanto, se calcolandosi per mezzo della Tavola Parabolica la quantità d'acqua affetta di velocità in superficie, che esce da un lume, si assumesse per altezza della Parabola l'attuale altezza dell'acqua. Imperocchè negligenterebbesi tutta quella velocità della superficie, che certamente può avere origine da un' altezza, la quale va aggiunta all'altezza attuale dell'acqua per avere l'intera Parabola, che è la scala delle velocità della bocca. Egli è dunque necessario per fare un giusto calcolo della quantità d'acqua d'una tal bocca di determinare quell'altezza, che possa dirsi equivalente cagione di quella velocità, con cui attualmente si muove la superficie dell'acqua. Ma per venire in cognizione di questa equivalente altezza, e praticamente determinarla vuolsi indagare la velocità, che di fatto conviene alla superficie dell'acqua.

Due mezzi vi sono per misurare la velocità dell' acqua; uno è quello di scieglière un tratto d'alveo il più lungo che possa aversi, il più diritto, e il più regolare, e misurato questo con una nota misura, sia essa o la pertica, o il trabucco, o il braccio, per mezzo d'un galleggiante posto nello spirito, o sia filone dell' acqua, e prontamente restituito in esso, se mai per qualche impedimento incontrato per la strada dal filone si dipartisse, riconoscere il tempo, che consuma nello scorrere lo spazio determinato, servendosi a questo fine d'un orologio da saccoccia, il quale segni i minuti secondi, oppure contando le battute delle palettine, un tanto numero delle quali si sappia, che facciano un tempo conosciuto, per esempio d'un minuto primo, o d'un minuto secondo, ovvero numerando le vibrazioni d'un pendolo di nota lunghezza, che misuri i minuti secondi, o mezzi secondi. Un galleggiante comodo a quest' effetto potrà essere una palla di cera, mischiata con qualche colore per distinguerla meglio gettata all' acqua, del diametro circa d'un oncia, la quale per essere quasi della stessa specifica gravità dell' acqua, quasi tutta s'immergerà, e quindi non resterà esposta al vento, che possa accelerare, o ritardare il suo moto; cosa a cui si deve avvertire nello scegliere il tempo per fare una sì fatta esperienza.

Ma fissato in tal guisa il tempo, in cui il galleggiante, e per conseguenza l'acqua ancora scorre quel determinato spazio, per sapere dal tempo, e dallo spazio trovato inferire quell' altezza, da cui si può supporre prodotta quella velocità, colla quale l'acqua misurata attualmente si muove, è necessario d' avvertire, che si deve ammettere come cosa sufficientemente certa, perchè fondata su la ragione, e molto più su l'esperienza, che l'acqua esce da' fori de' Vasi con una velocità pari

a quella, che si sarebbe acquistata cadendo dall' altezza, che ha nel vaso medesimo, e pari a quella ancora, che acquisterebbe un Sodo cadendo dalla medesima altezza: che l'acqua che discende da una data altezza nel medesimo tempo acquista que' gradi di velocità, nel quale gli stessi gradi di velocità s'acquisterebbero da un Sodo cadente da eguale altezza: che in somma l'accelerazione dell' acqua, e degli altri fluidi è soggetta a tutte quelle stesse leggi, le quali si verificano nell' accelerazione de' Sodi (*).

Dalla qual cosa nasce poi, che siccome un Sodo cadendo da una data altezza in un dato tempo, nel fine della discesa acquista tale velocità, colla quale se si movesse equabilmente nel medesimo tempo farebbe uno spazio doppio del già descritto discendendo; così l'acqua ancora discendendo da una data altezza, oppure uscendo da un foro premuta dalla stessa altezza d'acqua sovrastante esce con quella tale velocità, colla quale movendosi equabilmente scorre uno spazio doppio dell' altezza della discesa, o dall' altezza dell' acqua premente nello stesso tempo, in cui un Sodo discenderebbe da quell' altezza medesima. Ora dalla dimostrazione dell' Ugenio dedotta dalla lunghezza del pendolo del suo orologio oscillatorio si ha, un Sodo in un minuto secondo cade con moto accelerato dall' altezza di quindici piedi di Parigi un pollice, e due linee; e dall' esperienza si ha come riferisce M. Pitot nelle Memorie dell' Accademia Reale dell' anno 1730, che un corpo cadendo nell' aria libera percorre uno spazio di quattordici piedi di Parigi in un minuto secondo; dunque un grave cadendo, secondo l'Ugenio dall' altezza di quindici piedi, un pollice, e due linee in un minuto secondo nello

(*) Veggasi il Sig. Manfredi nell' Annotazione terza al Cap. 1 del Libro *Della Natura de' Fiumi* del Sig. Guglielmini pag. 34 e seguenti, stampato in Bologna.

stesso tempo colla velocità tutta acquistata nel fine di tale discesa scorrerebbe trenta piedi, due pollici, e quattro linee; e un grave cadendo secondo M. Pitot da quattordici piedi in un minuto secondo con tutta la velocità acquistata nella discesa nello stesso tempo farebbe equabilmente ventotto piedi. Ma i corpi liquidi seguono le stesse leggi de' Sodi per ciò, che riguarda l'accelerazione loro. Dunque l'acqua, che cade da quindici piedi, un pollice, e due linee, o da quattordici piedi, in un minuto secondo, oppure l'acqua che da tali altezze è premuta, avrà una velocità tale, per cui equabilmente passerà in un minuto secondo uno spazio di trenta piedi, due pollici, e quattro linee, o di ventotto piedi.

Noti per tanto tali spazj fatti da un grave tanto cadendo, quanto movendosi equabilmente per un minuto secondo, facilissima cosa è, data l'altezza, da cui discende l'acqua, o da cui è premuta, a trovare lo spazio che in un minuto secondo deve fare equabilmente colla velocità tutta, che all'acqua viene impressa da quell'altezza: e dato vicendevolmente lo spazio, che in un minuto secondo fa l'acqua, a trovare l'altezza d'onde nasce quella velocità per cui l'acqua atta si rende a scorrere il dato spazio nel dato tempo.

Nè altro vi vuole per tutto ciò; che considerare, essere gli spazj fatti con moto equabile dall'acqua colle velocità acquistate nel fine delle discese, o ad esse impresse dall'altezze dell'acqua sovrastante, come le velocità, ed essere queste velocità dell'acqua, come le radici quadrate delle altezze, dalle quali discendono, o da cui esse acque sono superiormente premute, e d'indi stabilire la proporzione: come la radice quadrata dell'altezza, da cui discende un grave in un minuto secondo, allo spazio equabile, che nello stesso tempo scorre

(cose note dalla dimostrazione dell' Ugenio, o dall' esperienza riferita da M. Pitot), così una qualunque altra radice quadrata d'un altezza allo spazio corrispondente. Ma per ispiegarmi più chiaramente, se è possibile, si supponga nella dimostrazione dell' Ugenio, che un grave in un minuto secondo discenda da quindici piedi, ed un decimo d'altezza, e faccia trenta piedi, e due decimi di spazio col moto equabile nello stesso tempo, sostituendo un decimo al pollice, e due linee, ciò che porta una diversità minore di $\frac{3}{100}$. Se si vuole da questi dati determinare l' altezza da cui nasce una data velocità, o vicendevolmente la velocità che nasce da una data altezza si nomini l'altezza x, e la velocità, oppure lo spazio del moto equabile, che è la stessa cosa u; sarà la proporzione:

$\surd 15{,}1 : 30{,}2 = \surd x : u$ moltiplicando gli estremi termini, e li medj $u \surd 15{,}1 = 30{,}2 \surd x$

$15{,}1\ uu = 912{,}04\ x$

$uu = 60{,}4\ x$

Dalla qual formola uu eguale 60,4 x oppure $uu = \frac{604x}{10}$ si cava, che il quadrato dello spazio del moto equabile fatto dall' acqua sotto l' altezza x in un minuto secondo rappresentato per uu, oppure il quadrato della velocità è eguale sempre a sessanta altezza, e quattro decimi sovrastanti all' acqua significate per 60,4 x. Sia dunque x eguale a tre piedi di Parigi; saranno 60,4 x eguali a 181,2, e però il quadrato uu sarà eguale a cento ottant' uno piedi, e due decimi. Ma la radice quadrata di uu è eguale ad u, e la radice quadrata di 181,2 è eguale a piedi 13,46105. Dunque sarà u eguale a piedi tredici, e 46105 centomillesimi, cioè lo spazio equabile fatto dall' acqua in un minuto secondo, con la velocità acquistata sotto l'altezza di tre piedi di Parigi,

sarà piedi tredici, e $\frac{46105}{100000}$. Sia ora lo spazio fatto dall' acqua con moto equabile in un minuto secondo dieci piedi di Parigi sarà il quadrato di uu eguale a cento, e però sarà $100 = 60{,}4\,x$, e $\frac{1000}{604}$ eguale all' altezza x; cioè l' altezza x, che produce la velocità, con cui l'acqua in un minuto secondo scorre equabilmente lo spazio di dieci piedi, è un piede sei pollici, e due linee.

Egli è pertanto manifesto da ciò, che è stato fin quì detto, che date l'altezze dell' acqua in piedi di Parigi, si troveranno nella stessa misura gli spazj dovuti a quelle altezze nel tempo d'un minuto secondo, moltiplicando l'altezza data per sessanta, e quattro decimi, e dal prodotto estraendo la radice quadrata, che sarà lo spazio dovuto all' altezza data; e vicendevolmente dati gli spazj in piedi di Parigi fatti dall' acqua in un minuto secondo, si avranno nella stessa misura l'altezze dovute a quegli spazj facendo il quadrato dello spazio dato, e dividendo questo sempre per il numero sessanta, e quattro decimi. Se in luogo de' piedi quindici, ed un decimo, e trenta e due decimi dell' Ugenio si assumessero i piedi quattordici, e ventotto posti da M. Pitot, si otterrebbero gli spazj dovuti alle altezze, e le altezze dovute agli spazj operando nello stesso modo, e sostituendo al numero 60,4 il numero 56.

Stabilito un tale fondamento, veniamo ora all' applicazione di questo nella misura della quantità d'acqua. Sia la Fig. ABCD (Fig. 7.) l' oncia Milanese, e per questa passi l'acqua sotto l'altezza d'once quattro, qual è l'altezza AB della luce. L'acqua nella superficie sia affetta di velocità, e sia tutta la luce ABCD libera, cioè l'acqua inferiore non rigurgiti quella, che per essa sgorga. Cercasi qual sia la quantità d'acqua che per questa luce passa.

I. Si

I. Si misuri per mezzo del galleggiante la velocità dell' acqua nella superficie; e sia questa tale, che il galleggiante faccia lo spazio di sessanta braccia Milanesi in un minuto d' ora. Poichè il minuto secondo è la sessantesima parte del minuto d' ora, dunque lo spazio fatto in un minuto secondo sarà un braccio.

II. Si riduca il braccio Milanese al piede di Parigi. Il braccio Milanese è 1152 particole di quelle, delle quali il piede di Parigi ne contiene 629. Facendo dunque come 629 e 1152, così 1 ad un quarto termine, sarà questo piedi 1,83148, ossia prossimamente $1.\frac{5}{6}$ a' quali sarà eguale il braccio Milanese.

III. Si trovi l'altezza, che corrisponde allo spazio d'un piede, e cinque sesti fatto in un minuto secondo, facendo il quadrato di $\frac{11}{6}$ che sarà $\frac{121}{36}$, e dividendo questo per 60,4, s' avrà l' altezza cercata $\frac{1210}{21744}$.

IV. Si riduca a linee Francesi il rotto $\frac{1210}{21744}$ moltiplicandolo per 144, numero delle linee contenute nel piede Francese, che risulteranno per l'altezza linee otto circa, e si riducano queste a punti del braccio Milanese, formando la proporzione, come 1152 a 629, così 8 a 4 punti; ed un terzo circa.

V. All' altezza trovata di punti quattro ed un terzo, s' aggiunga l'altezza AB d'once quattro, e così sarà l'altezza dell' acqua della bocca, insieme con l'altezza equivalente, once quattro, punti quattro, ed un terzo.

VI. Nella prima Tavola Parabolica si trovi la Parabola dell' altezza di once quattro, e punti quattro, ommettendo il terzo per brevità, e da questa si sottragga la parabola dell' altezza punti quattro, ed il rimanente Trapezio Parabolico si moltiplichi per la larghezza AD d'once tre, che il prodotto sarà la quantità d'acqua della luce data.

CALCOLO.

Altezza on. 4. p. 4. Prodotto 9,02055. Parabola 6,01404
Altezza ponti 4. Prodotto 0,19245. Parabola 0,12830

Trapezio Parabolico 5,88574
Larghezza della luce once 3

Quantità d'acqua once cubiche 17,65722

Sia ora da calcolarsi la quantità d'acqua, che tramanda il Quadretto Mantovano ABCD (Fig. 8) nell' ipotesi, che l'altezza AB d'once dodici sia l'altezza dell' acqua, e che l'acqua nella superficie BC sia veloce, e che essa non soffra rigurgiti.

I. Per mezzo del galleggiante si riconosca la velocità dell' acqua nella superficie, la quale si trovi atta a scorrere cento braccia Mantovane in un minuto d' ora, e però braccia uno, e due terzi in un minuto secondo.

II. Si riduca il braccio Mantovano al piede di Parigi. Questo è a quello come 14400 a 20695, oppure come 2880 a 4139; quindi facendo come 2880 a 4139, così $1\frac{2}{3}$ ad un quarto numero, sarà questo $2\frac{39525}{100000}$, e tanti piedi di Parigi saranno quelli, che scorre il galleggiante in un minuto secondo.

III. Si trovi l'altezza, che corrisponde allo spazio di piedi $2\frac{39525}{100000}$ fatto in un minuto secondo, quadrando questo spazio, e dividendolo per 60,4, e sarà quest' altezza il rotto $\frac{9499}{100000}$.

IV. Si riduca a linee Francesi il rotto $\frac{9499}{100000}$ moltiplicandolo per 144 numero delle linee contenute nel piede Francese, che risulteranno per l'altezza linee Francesi $13\frac{67}{100}$, e si riducano queste a punti del braccio

Mantovano, stabilendo la proporzione 4139 a 2880, così 13 $\frac{67}{100}$ a nove punti e $\frac{51}{100}$.

V. All' altezza trovata di punti 9 $\frac{51}{100}$ s'aggiunga l'altezza della luce AB d' once 12, ovvero di punti 144, che sarà l' altezza dell' acqua della luce con l' altezza equivalente punti 153 $\frac{51}{100}$.

VI. Nella Tavola Parabolica si trovi la parabola dell' altezza 153, ommettendo $\frac{51}{100}$ senza derogare alla precisione del calcolo, e da questa si sottragga la parabola dell' altezza 9, ed il rimanente Trapezio Parabolico si moltiplichi per la larghezza AD d'once 12 ridotte a punti 144, che il prodotto sarà la quantità d'acqua che era da trovarsi.

CALCOLO.

Altezza 153.	Prodotto 1892,50596.	Parabola	1261,67064
Altezza 9.	Prodotto 27,00000.	Parabola	18,00000
		Trapezio Parabolico	1243,67064
		Larghezza della luce, punti	144
		Quantità d' acqua, punti cubici	179088,57216

E' da notarsi, che volendosi ridurre le quantità d'acqua trovate in punti cubici ad once cubiche, oppure quelle trovate in once cubiche a piedi cubici, ciò si otterrà dividendo costantemente il numero trovato de' punti cubici, oppure delle once cubiche rappresentanti le quantità d'acqua per il numero 498,83. Così volendosi trovare quante once cubiche milanesi facciano punti cubici Milanesi 8807,951, si dividano detti punti cubici 8807,951 per 498,83, ed il quoziente 17,65722 sarà la quantità d' acqua in once cubiche Milanesi. Infatti nel sopra posto Calcolo se invece di once quattro, e punti quattro, si cercherà la parabola di punti 52, e da que-

sta si dibatterà la parabola di punti quattro moltiplicando il residuo per punti 36 invece di once 3, si otterrà la suddetta quantità di punti cubici 17,65722. E volendosi trovare a quante once cubiche Mantovane equivalgono i punti 179088,57216, si divida parimenti questo numero di punti cubici per 498,83, che il quoziente sarà 359,017, e tante per appunto saranno le once cubiche Mantovane eguali a punti cubici sopranotati.

Il numero fisso 498,83 stabilito per divisore de' punti cubici per poterli ridurre ad once cubiche, e per divisore delle once cubiche, affine di ridurle a piedi cubici risulta palmarmente da un conto paralello di un egual luce calcolata colle once, e coi punti. Prendasi per esempio a calcolare la quantità di punti cubici erogata in un secondo da una luce quadrata di un' oncia senza battente, ossia di punti dodici.

Altezza punti 12. Prodotto 41,56920 Parabola 27,71280
Larghezza della luce punti 12

Quantità d'acqua punti cubici 332,55360

La suddetta quantità di punti cubici si ottiene egualmente moltiplicando l'area della luce, o bocca, che è 144 punti quadrati per la velocità media, la quale agguaglia due terzi della velocità 3,46410 corrispondente nella Tavola all' altezza 12.

Si conteggi ora la stessa quantità d'acqua che passa dalla stessa luce di un' oncia quadrata non più considerata divisa in punti. La parabola dell' altezza 1 è $\frac{2}{3}$ che moltiplicata per la larghezza di un' oncia, rimane ancora due terzi.

S'istituisca ora la seguente proporzione, come i suddetti punti cubici 332,55360 ai due terzi d'oncia cubica, così i punti cubici dati ad un quarto termine. E moltiplicando detti punti cubici per 3, e dividendo per

2 sarà ancora 498,83040 ad uno come qualunque numero di punti cubici dati ad un quarto termine, che sarà la quantità d'acqua in once cubiche; ecco come il suddetto numero 498,83 (ommettendo le altre cifre decimali senza error sensibile nella pratica) deve servir di divisore de' punti cubici per ridurli ad once cubiche, e di moltiplicatore delle once cubiche, desiderandosi li punti cubici. Lo stesso discorso s'applichi ancora alle once cubiche relativamente a piedi cubici.

Il secondo mezzo per misurare attualmente le velocità dell'acqua esige, che si prepari un quadrante graduato EFG (Fig. 9.) dal centro E del quale pendano due fili uno EP, che deve rimanere in aria colla palla di piombo attaccata P per denotare il perpendicolo, e l'altro più lungo EA, a cui deve essere attaccata la palla A da infondersi nell'acqua a quella profondità, dove si desidera sapere, quanto impeto vi si eserciti, e con quanta velocità l'acqua vi scorra. La palla a quest' uso deve essere di legno ben secco, e difficile a fondersi, del diametro d'oncia in circa, e sufficientemente pesante, al qual fine devesi ancora in essa fare un foro, che arrivi fino al centro, e questo riempirsi di piombo. Il comune uso, che si fa di questo stromento, si è di dedurre le velocità dagli angoli diversi di deviazione, che fa il pendolo immerso a varie profondità della stessa acqua, oppure d'acque diverse. E queste velocità si calcolano da alcuni come le tangenti di questi angoli, e da altri più verosimilmente come le radici quadrate di queste medesime tangenti. Quindi se immersa la palla fino alla profondità M fosse l'angolo di deviazione GEO del pendolo trenta gradi, e immersa la medesima alla profondità A fosse l'angolo GEL di cinquanta gradi, sarebbe la velocità prima alla seconda, come la radice quadrata della tangente di tren-

ta gradi alla radice quadrata della tangente di cinquanta gradi, le quali tangenti cercate nel libro delle Tavole de' seni, e tangenti, si troverebbero la prima 57735, e la seconda 119175, le di cui radici quadrate sono in circa 240,20 e 345,22, e come 240,20 e 345,22 sarebbero le velocità misurate. Altrimenti dovrebbero calcolarsi le velocità dell' acqua misurate col pendolo, se le acque, delle quali si misurano le velocità, non fossero orizontali, ma sensibilmente all' orizonte inclinate. Siccome però pochi sono i Fiumi, la superficie de' quali, e fondo regolato si distingua sensibilmente dal piano orizontale; di maniera che, quando ancora avessero tre piedi di caduta per ogni miglio, non giugnerebbe quella ad inclinarsi che qualche minuto sotto l' orizonte; quindi è cosa superflua il trattenersi in questo nuovo calcolo, potendo per ogni caso servire il già dato.

Dal Sig. Zendrini ad altr' uso si trasferiscono gli angoli di deviazione trovati col sopradetto stromento, e sono da lui ordinati a determinare l'altezza equivalente, che può produrre quella velocità, che attualmente intendiamo di misurare. Dimostra egli al numero 24 del Capitolo 5 della Parte 2 *dell' Acque Correnti*, che la forza assoluta dell' acqua, che tiene sospesa la palla immersa è eguale al prodotto, che nasce dalla moltiplicazione del seno dell' angolo di deviazione nel peso, che resta alla palla nell' acqua, diviso per il seno del compimento dello stesso angolo di deviazione. È determinata così la forza dell' acqua per un quarto proporzionale al seno del compimento dell' angolo di deviazione, al seno retto dello stesso angolo di deviazione, ed al peso relativo della palla nell' acqua, vuole che questo numero quarto proporzionale esprimente in peso la forza si riduca sotto il volume dovuto all' acqua, e si consideri come un cilindro d' acqua che abbia per base il cer-

chio massimo della palla; perchè così l'altezza di questo cilindro sarà quell' altezza equivalente, da cui nasce la velocità dell' acqua, che attualmente si misura. La qual cosa poi più chiaramente espressa è lo stesso che dire, che si dividerà il numero indicante la forza ridotta al volume dovuto all' acqua ritrovata col metodo superiormente esposto per il cerchio massimo della palla, il quoziente che ne risulterà, sarà l'altezza equivalente, che produce la velocità dell' acqua misurata.

Supposta questa dottrina, pesi la palla, che usasi per misurare gli angoli di deviazione (*a*) once quattro, danari 8 $\frac{1}{2}$, e sia d'un' oncia di diametro; (d'una palla di tal peso, e diametro si è fatto uso in qualche esperimento). Questa immersa nell' acqua perderà tanto del suo peso, quant' è il peso dell' acqua sotto lo stesso volume della palla. Si riconosca pertanto cosa perda la palla di peso nell' acqua in questa maniera. In un piatto della bilancia si ponga il peso d' once 4 denari 8 $\frac{1}{2}$ e dall' altro piatto si faccia pendere la palla da un sottilissimo filo, sicchè possa facilmente immergersi nell' acqua. S' immerga la palla nell' acqua (*b*) contenuta in un vaso, che non farà più equilibrio colle once 4, e denari 8 $\frac{1}{2}$, ma questo peso preponderà a quella. Si carichi di peso il piatto ove sta la palla, finchè di nuovo faccia equilibrio col primiero peso, e sia il peso aggiunto once 2 danari 11 $\frac{1}{2}$. Si sottragga questo dalle once

---

(*a*) N.E. = Lo Zendrini uno de' più gran promotori della palla a pendolo, faceva uso anch' esso d'una palla di legno; sembranmi però più commendabili quelli che l' adoprano d'ottone a pareti più, o men sode, secondo la diversità delle circostanze; percioccchè il legno secco s'imbeve facilmente d'acqua; e variando così la sua gravità specifica, riesce variamente sensibile all' impeto della corrente, e perciò non ci porge deviazioni, che sian proporzionali al detto impeto.

(*b*) L'acqua da porsi nel vaso per riconoscere il peso della palla relativo, deve essere di quella stessa, di cui si vuol misurare la velocità, essendo le acque una più pesante dell' altra.

4 danari 8 $\frac{1}{2}$, e il residuo del peso di danari 45, o grani 1080, sarà il peso della palla nell' acqua.

Riconosciuto così il peso della palla nell' acqua di danari 45, o grani 1080, sia immersa questa palla in una data acqua, dove faccia un angolo di deviazione di 30 gradi, sarà la forza assoluta dell' acqua, che tiene sospesa la palla eguale al peso di circa grani 624. Per ridurre questo peso sotto del volume proprio dell' acqua, conviene sapere cosa pesi l' acqua contenuta in un vaso d' oncia cubica, il di cui peso sarà in circa di grani 2664, e fare la proporzione come 2664 : 624 = 1728 ad un quarto numero, oppure come 111 : 26 = 1728 a 404,75; sarebbe dunque la forza assoluta ridotta sotto il volume dell' acqua 404,75, la quale divisa per il cerchio massimo della palla darà di quoziente 3,58, cioè punti tre, e $\frac{58}{100}$ i quali saranno l'altezza equivalente, che produce la velocità attualmente misurata dell' acqua. Si troverà il cerchio massimo della palla, facendo prima come 113 a 355, così un' oncia, o dodici punti, che sono il diametro della palla, ad un quarto 37,699, che sarà la circonferenza, d' indi moltiplicando la circonferenza 37,699 per 3, quarta parte del diametro, che darà 113,097.

Non possiamo però dissimulare una difficoltà, che in questa s'incontra, nè tralasciare di spianarla nel miglior modo, che per noi si possa. Suppone il Zendrini, che il peso trovato 404,75, ridotto in un cilindro d' acqua colla base eguale al cerchio massimo della palla, debba questo avere per altezza quella appunto, da cui dipenderebbe la velocità dell' acqua misurata, o questa derivi dalla pressione, o dalla discesa: ma non è abbastanza chiaro, che per essere il peso di questo tal cilindro d' acqua in equilibrio colla forza dell' acqua, che

inve-

investe la palla, la sua altezza debba eguagliare quella, che produce la velocità attuale dell' acqua. Anzi se si consideri, che la stessa acqua dotata della stessa velocità urtando nel circolo massimo della palla direttamente farebbe su di questo doppia impressione di quella, che fa sulla superficie della palla medesima urtata con direzione paralella al suo asse, siccome dimostra *Neuton* nella Propos. 34 del libro secondo *de' Principj Matem.* Teorema 28 sembra, che trovata la forza assoluta corrispondente all' impressione fatta nella superficie della palla, questa si dovesse raddoppiare per l'impressione nel circolo massimo; e così raddoppiata si dovesse ridurre sotto del volume dovuto all' acqua, e che finalmente si dovesse dividere per il cerchio massimo della palla per conseguire l' altezza da cui deriva la velocità dell' acqua misurata. Il che posto nell' addotto esempio, essendosi trovata la forza assoluta dell' acqua, che urta la superficie della palla equivalente a grani 624, sarebbe la forza assoluta contro del cerchio massimo eguale a grani 1248, ed essendosi trovata per il primo caso la stessa forza assoluta, ridotta sotto il volume dell' acqua 404,75, e l' altezza ricercata 3,58 serebbe per il secondo caso la forza assoluta ridotta al volume dell' acqua 809,50, e l'altezza 7,16 (*a*).

La palla sospesa dal centro del quadrante per misurare la velocità dell' acqua può essere molto più co-

(*a*) N.E. L' Autore del Supplemento primo nella prima delle sue disertazioni idrauliche pubblicate l'anno 1793, ha dimostrato, che una superficie qualunque sommersa in un fluido riceve nella percossa diretta, la metà soltanto di quell' urto, che potrebbe colla propria velocità generare un numero di filamenti fluidi, eguale al numero de' punti nella superficie urtata, e lo stesso (avuto però riguardo alla diversità del seno d' incidenza) ha luogo presso a poco anche nella percossa obbliqua. Posto questo principio la tangente di deviazione nella palla a pendolo, riuscirebbe la metà soltanto di quel, che porterebbe la grandezza dell' urto, dal che risulterebbe, che l' altezza dell' acqua trovata del nostro Autore, si dovrebbe nuovamente raddoppiare per aver quella a cui corrispondesse la forza dell' acqua urtante.

meda, e adattata di quello, che sia il galleggiante, perchè dappertutto questa si può usare, o l'alveo sia dritto o tortuoso; perchè si possono prendere le velocità medie osservando gli angoli di deviazione su la destra, nel filone, e su la sinistra d'una sezione, e prendendo tra questi l'angolo medio, che sarebbe quello dinotante l'angolo della velocità media; perchè finalmente sussistendo la dottrina del Zendrini superiormente esposta per trovare l'altezze equivalenti, che sono cagione dell' attuali velocità, si rispiarmerebbe il tedio delle riduzioni de' spazj trovati col galleggiante nella propria misura alla misura del piede di Parigi, e vicendevolmente delle riduzioni dell' altezze trovate in misura di Parigi alla misura propria del Paese. Sebbene un tale incomodo può risparmiarsi ancora riducendo per una volta sola i piedi 15 della caduta de' sodi, e i 30 del moto equabile dell' Ugenio alla misura del proprio Paese, e sostituendo al numero 60, che deve dividere il Quadrato dello spazio del moto equabile, ossia della velocità, quel numero, che darebbe il calcolo superiormente posto addattato alla misura del proprio Paese. Così i piedi 15,1 di Parigi ridotti al braccio Milanese sarebbero braccia 8,19227, e i piedi 30,2 sarebbero 16,38454, ed il numero 60,4 resterebbe 32,76908; e gli stessi piedi 15,1 di Parigi sarebbero braccia Mantovane 10,50688, i piedi 30,2, braccia 21,01376, e il numero 60,4 diverrebbe 42,02752.

Posto dunque che comodo, e vantaggioso possa riuscire l'uso della palla sospesa dal centro del quadrante per calcolare le quantità d'acqua, sieno da calcolarsi l'oncia Milanese, e il Quadretto Mantovano facendosi uso di questo stromento, e stando tutte le stesse condizioni poste ne' due precedenti esempj. E primieramente sia da calcolarsi la quantità d'acqua dell' oncia Milanese.

Suppongo, che la palla di cui si fa uso per misurare gli angoli di deviazione sia per il peso assoluto d'once 4 danari 8 $\frac{1}{2}$ Milanesi, e d'un oncia di diametro, e che abbia di peso relativo, o di peso nell'acqua danari 45, oppure grani 1080, come di sopra si è detto: Sebbene in pratica possono essere necessarie palle più pesanti, o meno pesanti, secondo la maggiore, o minor forza dell'acqua da misurarsi. Ciò supposto:

I. Si osservi l'angolo di deviazione, che fa la palla dal perpendicolo posta nella superficie dell'acqua, che passa per la bocca, e sia questo di gradi 28.

II. Dall'angolo di deviazione di gradi 28 si deduca la forza assoluta dell'acqua in quel sito, cercando primieramente nelle tavole de' seni, e tangenti il seno di ventotto gradi, che è 4694716, e il seno del compimento di sessantadue gradi, che è 8829476; d'indi facendo il prodotto del seno dell'angolo di deviazione nel peso relativo della palla nell'acqua, cioè il prodotto di 4694716 in 1080, e questo dividendolo per il seno del complemento 8829476, che il quoziente 574, 24622 sarà il numero esprimente la forza assoluta.

III. Dalla forza assoluta trovata 574,24622 ridotta al volume d'acqua, che risulterà 372,48403, e divisa questa per il cerchio massimo 113,097 si deduca il quadrato della velocità, oppure si trovi l'altezza, la quale è come questo quadrato, e sarà in circa punti 3,29, ma dicasi per maggior facilità del calcolo punti tre.

IV. Nella Tavola Parabolica si trovi la Parabola dell'altezza di punti 51, e da questa si sottragga la Parabola dell'altezza di punti 3, e il rimanente Trapezio Parabolico si moltiplichi per la larghezza della bocca AD (Fig. 7.) d'once tre ridotta a punti trentasei, che il prodotto sarà la quantità d'acqua.

CALCOLO.

Altezza 51.	Prodotto 364,21293.	Parabola	242,80862
Altezza 3.	Prodotto 5,19615.	Parabola	3,46410
		Trapezio Parabolico	239,34452
		Larghezza della bocca punti	36
		Quantità d' acqua punti cubici	8616,40272

Suppongasi ancora per la misura della quantità d'acqua del Quadretto Mantovano, che la palla, di cui si fa uso per misurare gli angoli di deviazione sia dello stesso peso di prima, e dello stesso diametro, con questo divario solo, che tanto il peso quanto la misura sia Mantovana.

I. Si riconosca l' angolo di deviazione, che fa la palla dal perpendicolo immersa nella superficie dell' acqua, e sia di trentanove gradi.

II. Si moltiplichi il seno di trentanove gradi, che è 6293204 per 1080 peso relativo della palla nell' acqua, e questo prodotto si divida per il seno del compimento di 51 gradi, che è 7771460, il quale sarà 874,56672, che dinoterà la forza assoluta dell' acqua.

III. Dalla forza assoluta 874,56672, che ridotta al volume dell' acqua riesce 567,28652, s' inferisca il quadrato della velocità, che è eguale all' altezza cercata, dividendo il detto numero per il cerchio massimo della palla 113,097, e si avrà per altezza punti 5,01592, che senza errore nella pratica si puonno ritenere i soli punti cinque.

IV. Nella Tavola Parabolica si cerchi la Parabola dell' altezza 149, e da questa si sottragga la Parabola dell' altezza 5, e il rimanente Trapezio Parabolico si moltiplichi per la larghezza AD (Fig. 8.) d' once 12 ridotta a punti 144, che il prodotto sarà la quantità d' acqua.

CALCOLO.

Altezza 149	Prodotto	1818,77595	Parabola	1212,51730
Altezza 5	Prodotto	11,18035	Parabola	7,45357
			Trapezio Parabolico	1205,06373
			Larghezza della bocca	144

Quantità d'acqua punti cubici 173529,17712

Servendosi degli angoli di deviazione per riconoscere le velocità dell' acqua, e da queste l'altezze equivalenti, non sarà inopportuno d'avvertire, che può essere cosa utile, anzi necessaria, quando le acque da misurarsi sono di qualche larghezza, il prendere gli angoli di deviazione in più sezioni diverse, e in ciascuna sezione alla destra, al mezzo, e alla sinistra, e tra tutti questi angoli trovar l'angolo medio, e dall' angolo medio dedurre l'altezza equivalente. Per esempio scorra l'acqua per l'alveo ABCD (Fig. 10.), e si scelgano in esso quattro sezioni AD, EF, GH, BC. S'immerga la palla nella superficie dell' acqua in *e*, *f*, *g*, e siano gli angoli di deviazione gradi 15, 20, 17, si faccia lo stesso in *h*, *i*, *l*, e siano gli angoli 12, 16, 14. S'immerga in *m*, *n*, *o*, e siano gli angoli 16, 22, 19. S' immerga finalmente la palla in *p*, *q*, *r*, e siano gli angoli di deviazione trovati 18, 30, 23, si sommino gli angoli trovati in *e*, *h*, *m*, *p*, che fanno la somma di gradi 61, i quali divisi per 4, che è il numero delle stazioni, danno gradi 15, e miuuti 15, per l'angolo medio; lo stesso si faccia degli angoli *f*, *i*, *n*, *q*, e degli angoli *g*, *l*, *o*, *r*, i primi de' quali fanno la somma di gradi 88, e danno per l'angolo medio gradi 22, e i secondi fanno la somma di gradi 73, e danno per angolo medio gradi 18, minuti 15. Si sommino di nuovo gli angoli medj trovati di gradi 15 minuti 15, 22, 18, e

minuti 15, che fanno gradi 55 minuti 30, e questa somma si divida per 3, che risulteranno gradi 18, e minuti 30 per l'angolo medio, da cui deve dedursi la velocità media, e per conseguenza l'altezza media dell'acqua dell'alveo ABED.

Avanti di por fine a questo Capo è giusto di fare una considerazione, la quale si è, che da qualche esperienza (*a*) fattasi sembra constare; che calcolando l'altezze equivalente, da cui nascono l'attuali velocità dell'acqua sul principio, che le leggi dell'accelerazioni de' Sodi egualmente tengano nelle accelerazioni de' fluidi, questi calcoli sieno assai uniformi co' calcoli delle stesse altezze fatti per mezzo degli angoli di deviazione, riuscendo poco diverse, e assai piccole l'altezze, da cui nascono le velocità dell'acqua per il primo principio, e per il secondo. Se pertanto usando tutti due i metodi dati per riconoscere l'altezza equivalente, da cui nasce la velocità della stessa acqua data nello stesso sito, si trovasse costantemente la stessa altezza, e per l'uno, e per l'altro principio, questo sarebbe un' evidente prova, tanto per conchiudere, che le acque debbono nell'assegnato modo misurarsi, quanto per confermare queste due verità ancora controverse; che le leggi delle accelerazioni de' Sodi sono le stesse di quelle de' fluidi, e che le velocità dell'acque correnti sono come le radici quadrate delle tangenti degli angoli di deviazione.

(*a*) N.E. Sarebbe a desiderarsi, che l'Autore ne avessero egli stesso descritte queste esperienze, quando siano state fatte da lui, o ne avesse per lo meno indicato il fonte, da cui le ha attinte, e se queste sperienze fossero dello stesso genere di quelle del Zendrini *Leggi, e Fenomini* Cap. V. Num. 11, si avrebbero presentemente in poco conto, come in poco conto si hanno quelle del Zendrini stesso.

CAPO VIII.

Uso della Tavola Parabolica per calcolare le quantità d'acqua di quelle luci, che soffrono rigurgito.

Accade frequentemente che l'acqua, la quale esce da una luce d'assai moderata larghezza, e di non dissimile altezza scorre susseguentemente per un alveo di quella assai maggiore, e sotto maggiore altezza, sebbene da altr' acqua estranea non venga aumentata. Così accaderà di vedere la quantità d' acqua proveniente da una luce non più larga d' otto in nove once, e d' altrettanta altezza d' acqua sopra la sua soglia dilatarsi in un alveo inferiormente alla luce medesima largo quattro, e più braccia, e sotto d' un altezza di tredici, o quattordici once. Non si può intendere un tal fenomeno, che non s'intenda ancora, che l' acqua inferieriormente alla luce venga ristagnata, e rigurgitata, o per mancanza della dovuta pendenza dell' alveo, per cui scorre, o per qualche impedimento, che nel suo viaggio ritrovi, che la ritardi. Imperocchè se tutta l'acqua, che in un dato tempo passa per la luce nel medesimo tempo venisse smaltita per l'alveo, essa camminerebbe sotto pari altezza a quella del lume, quando l'alveo avesse eguale larghezza a quella della luce medesima, o essendo l' alveo più largo della larghezza della luce tanto diminuirebbesi l' altezza dell' acqua in questo dall' altezza dell' acqua della luce, quanto reciprocamente è minore la larghezza di questa dalla larghezza di quello. Ma non sarebbe mai possibile, che la stessa quantità d'acqua della bocca passasse per l' alveo, e sotto maggior larghezza, e sotto maggiore altezza.

La giusta distribuzione dell' acque richiede adunque, che in questa s' abbia riguardo a quel detrimento, che può patire una bocca a proporzione della sua larghezza, e altezza nel suo giusto quantitativo d' acqua a cagione de' rigurgiti. Ma per abilitarsi a ben computare la quantità d' acqua, che può essere impedita dal passare da una luce per cagione de' rigurgiti, si richiedono alcuni ripieghi da praticasi. Il primo si è, che le spalle della luce, o sieno queste di legno, o di sasso, o di lastra di ferro sieno divise tanto dalla parte, dove viene la corrente dell' acqua, quanto dalla parte opposta in quel numero di parti eguali, che sono dovute all' altezza, che richiede l' acqua alla bocca, perchè per essa passi la giusta quantità. Così per esempio le spalle dell' oncia Milanese tanto da una parte, quanto dall' altra debbono essere divise in sei once, cominciando dal lembo inferiore dell' apertura, e terminando la divisione due once al dissopra del lembo superiore, siccome richiedono le due once di battente. E le spalle del Quadretto Mantovano tanto da una parte, quanto dall' altra debbono esser divise in quattordici once nel modo antecedentemente detto.

Il secondo ripiego si è, che gli alvei, che ricevono l' acqua dalle bocche sieno d'una grandezza proporzionata alla quantità d' acqua, che tramandano le bocche, e non eccedenti. E ciò affine di poter riconoscere con maggior sicurezza la quantità d'acqua, ancora dopo che è uscita dalla bocca, e incamminata nell' alveo, se fa bisogno, e per poter meglio distinguere i rigurgiti, che soffre la bocca. Che se la necessità di dovere il canale portare altr' acque estranee per esempio in occasione di pioggie, richiedesse che esso fosse più capace, si potrebbero fare le sue rive a scarpa, o in altra maniera, sicchè sul fondo la sua larghezza non eccedesse quel-

quella, che compete alla quantità d' acqua della bocca, e s' andasse poi dilatando nelle parti superiori per dar luogo all' altra acqua.

Usate queste diligenze tutto il calcolo de' rigurgiti dipende dal riconoscere esattamente l'altezza dell' acqua, che inferiormente alla luce s' appoggia alle spalle, e chiude parte dell' apertura di quella, la quale impedisce altrettant' acqua ad uscire dalla luce, quant' è la sua mole. E però questa quantità d' acqua deve essere sottrata dalla quantità d'acqua, che tramanderebbe la luce, se fosse del tutto libera, per avere il giusto quantitativo d' acqua, che questa attualmente trasmette.

Sia dunque CABD (Fig. 11.) il lume dell' oncia Milanese. Sieno le spalle CE, DF divise in once sei da C in E, e da D in F d' ambe le parti. Il livello dell' acqua superiormente alla bocca sia EF, sicchè l'altezza CE dell' acqua agguaglj once sei, e inferiormente ad essa l' acqua uscita per la bocca occupi la porzione CGHD dell' intero lume CABD, la di cui altezza sia CG d' once due. La scala delle velocità, con cui l' acqua CGHD, che opera per pura pressione contro l' altra, che esce dalla bocca CABD, sarà la Parabola fatta su l'altezza CG; e però la quantità d'acqua che s'oppone per tutto lo spazio della bocca CGHD a quella che esce, sarà eguale al prodotto della Parabola fatta su l'altezza CG moltiplicata per la larghezza CD della bocca; ma a questa quantità è eguale la quantità d'acqua, che viene impedita ad uscire dalla bocca CABD a cagione del rigurgito; dunque dalla quantità d'acqua, che tramanda la bocca CABD essendo libera dovrà sottrarsi la quantità d' acqua, che risulta dal prodotto della Parabola dell' altezza CG nella larghezza CD: e il residuo sarà la quantità d' acqua della bocca CABD rigurgitata per lo spazio CGHD. Potrà ancora determi-

narsi la quantità d'acqua della bocca CABD rigurgitata sottraendo dal Trapezio Parabolico, che è scala della velocità della bocca CABD libera la Parabola dell'altezza CG, e moltiplicando il residuo per la larghezza CD.

Il Trapezio Parabolico, che è scala della velocità dell'oncia Milanese libera, si è trovato nel calcolo fatto della quantità d'acqua d'essa al Capo VI eguale a 7,91234, ciò supposto

CALCOLO.

Trapezio Parabolico dell'oncia libera CABD	7,91234
Parabola dell'altezza CG del rigurgito eguale a 2.	1,88562
Residuo - - -	6,02672
Larghezza CD	3
Quantità d'acqua dell'oncia CABD rigurgitata, once cubiche - - - - - - - - -	18,08016

Nella stessa maniera potrà calcolarsi il Quadretto Mantovano CABD (Fig. 12.) supposto rigurgitato per la porzione CGHD, la di cui altezza CG sia d'once tre. Il Trapezio Parabolico, che è scala della velocità del Quadretto Mantovano libero, dall'esempio posto nel Cap. VI è 33,03652.

CALCOLO.

Trapezio del Quadretto CABD libero - - -	33,03652
Parabola dell'altezza CG del rigurgito eguale a 3	3,46410
Residuo - - -	29,57242
Larghezza CD	12
Quantità d'acqua del Quadretto CABD rigurgitato, once cubiche - - - - -	354,86904

Calcolata nel modo esposto la quantità d'acqua, che viene rigurgitata in una bocca il più delle volte occorrerà di dover disporre in maniera la bocca medesima, che non ostante il rigurgito dia quella stessa quan-

tità d'acqua, che darebbe se fosse libera. Ciò si può ottenere in due maniere, o aumentando l'altezza dell'acqua, che sta alla bocca oppure allargando la bocca medesima lasciandovi la stessa altezza d'acqua.

Per aumentare l'altezza d'acqua lasciata intatta la larghezza della bocca è d'uopo d'avvertire, che dall'ipotesi da noi adottata, che le velocità sieno come le radici quadrate dell'altezze, nasce questa verità, che sono i cubi dell'altezze, come i quadrati delle quantità d'acqua, e per conseguenza le semplici altezze, come le radici cubiche de' quadrati delle quantità d'acqua.

Ciò supposto volendosi trovare l'altezza, che deve darsi all'oncia Milanese, o al Quadretto Mantovano per qualche porzione rigurgitati, acciocchè tramandino per le loro luci eguali quantità d'acqua come se fossero libere si proceda così:

I. Si cerchino nella Tavola Parabolica le quantità d'acqua dovute all'altezze delle luci dell'oncia Milanese, e del Quadretto Mantovano, prescindendo dall'altezza delle due once di battente, che saranno queste quantità once 8, e once 41,56920, le quali corrispondono nella Tavola all'altezza 4 della luce dell'oncia Milanese, e all'altezza 12 del Quadretto Mantovano.

II. Si prendano le quantità d'acqua, che danno l'oncia Milanese, e il Quadretto Mantovano liberi sotto l'altezze d'once 6, e d'once 14 considerate le due once di battente, che sono 11,86852 per l'oncia Milanese, e 49,55482 per il Quadretto Mantovano.

III. S'aumentino queste quantità d'acqua medesime 11,86852, 49,55482 della quantità d'acqua impedita dal rigurgito, la quale stando a due esempj superiormente dati sarà 2, 82842 per l'oncia Milanese, e 5, 19615 per il Quadretto Mantovano, che sono i prodotti, i quali nella Tavola corrispondono alle altezze 2, e 3, secondo

che si sono supposti i rigurgiti: e risulteranno le quantità d'acqua aumentate per l'oncia Milanese 14,69694, e per il Quadretto Mantovano 54,75097.

IV. Si faccia per l'oncia Milanese questa proporzione, come il quadrato di 8 quantità d'acqua dell'oncia libera sotto l'altezza di 4 al quadrato di 14,69694 quantità d'acqua dell'oncia libera sotto l'altezza d'once 6 aumentata dell'acqua impedita dal rigurgito, così il cubo dell'altezza 4 ad un quarto numero, che sarà il cubo dell'altezza cercata, e la sua radice cubica l'altezza da darsi all'apertura dell'oncia Milanese perchè tramandi la stessa acqua, come se fosse libera. E per il Quadretto Mantovano si faccia come il quadrato di 41,56920 al quadrato di 54,75097, così il cubo dell'altezza 12 ad un quarto, che sarà parimente il cubo dell'altezza da darsi al Quadretto per avere lo stesso intento.

CALCOLO PER L'ONCIA MILANESE.

Quantità d'acqua 8, 14,69694, ridotte a minori termini 4, 7,34847.
Quadrati delle quantità d'acqua 16, 54,00000.
Cubo dell'altezza 4. eguale a 64.

PROPORZIONE.

16 : 54 :: 64 : 216

Radice cubica di 216 eguale a 6, eguale alla nuova altezza da darsi alla luce dell'oncia Milanese.

ESAME DELLA DATA REGOLA.

Altezza CE 6. Prodotto 14,69694. Parabola	9,79796
Altezza CG del rigurgito 2. Prod. 2,82842. Parab.	1,88562
Residuo - - -	7,91234
Larghezza CD	3
Quantità d'acqua once cubiche	23,73702

CALCOLO DEL QUADRETTO MANTOVANO.

Quantità d'acqua del Quadretto Mantovano 41,56920, 54,75097.
Quadrati delle quantità d'acqua 1727,99838, 2997,66871.
Cubo dell' altezza 12 eguale a 1728.

PROPORZIONE.

1727,99838 : 2997,66871 = 1728 : 2997,67152
Radice cubica di 2997,67152 eguale prossimamente a 14,42, eguale all' altezza nuova da darsi alla luce del Quadretto.

ESAME.

Altezza CE 14,42. Prodotto 54,75803. Parab. 36,50535
Altezza CG del rigurgito 3. Prod. 5,19615. Parab. 3,46413

Residuo - - - 33,04122
Larghezza CD 12

Quantità d'acqua del Quadretto, once cubiche 396,49464

Per altro senza fare i sopra posti calcoli, che sono assai lunghi, e fastidiosi per trovare l'altezza da darsi alle luci, perchè scarichino una data quantità d'acqua, sebbene sieno questi dedotti dalla più giusta teoria, si potrà a questo fine far uso della sola Tavola Parabolica. Imperocchè o i numeri esprimenti le quantità d'acqua, che debbono dare le luci, si troveranno esattamente nella Tavola, e le altezze ad essi corrispondenti saranno quelle da darsi alle luci, perchè sgorghino per esse le date quantità d'acqua; oppure i numeri medesimi non si troveranno esatti, e per conseguenza non si troveranno esatte l'altezze; ma si potranno dedurre per regola di proporzione. E per adattare e l'una, e l'altra

cosa ad un esempio; si debbano trovar di nuovo l'altezze da darsi all' oncia Milanese, ed al Quadretto Mantovano, una rigurgitata per due once della sua altezza, e l'altro per once tre, facendo uso della Tavola Parabolica. La quantità d'acqua dell' oncia Milanese aumentata dell' acqua rigurgitata viene espressa per il numero 14,69694. Ma il numero 14,69694 trovasi esattamente nella Tavola, e gli corrisponde l'altezza 6; dunque 6 once deve essere l' altezza della luce dell' oncia Milanese, come si è di fatto superiormente trovata, perchè questa non ostante il rigurgito mandi acqua, come se fosse libera. La quantità d'acqua del Quadretto Mantovano aumentata della quantità rigurgitata, si è determinata col numero 54,75097. Questo numero cercato nella Tavola non ritrovasi esatto; trovasi bensì il prossimo minore 52,38324 che corrisponde all' altezza 14, e il prossimo maggiore 58,09470, che corrisponde all' altezza 15. Prendasi dunque la differenza di 52,38324, da 58,09470, che è 5,71146, e la differenza di 52,38324 da 54,75097 numero dato, che è 2,36773, e facciasi la proporzione, come 5,71146 a 2,36773, così 1 differenza tra l' altezza 14, e l' altezza 15 ad un quarto termine, che sarà prossimamente $\frac{42}{100}$. S' aggiunga questo all' altezza minore 14, e sarà 14, 42 l' altezza da darsi al Quadretto Mantovano, come si è ancora superiormente trovato.

Si noti per chiarezza de' calcoli superiori, che in luogo delle Parabole, e de' Trapezj Parabolici rappresentanti le quantità d' acqua si sono presi i rettangoli, o i prodotti, tornando lo stesso; perchè queste quantità sono proporzionali a quelle. Notisi ancora per non prendere abbaglio nell' operare, che l' altezze trovate per i dati calcoli devono essere l' altezze dell' apertura delle

bocche, e che queste non debbono avere più Battente alcuno.

Ma per allargare la bocca, lasciata intatta l'altezza, devesi ricorrere a questo principio, che due bocche della stessa altezza scaricheranno la stessa quantità d'acqua nello stesso tempo, quando la larghezza d'una è alla larghezza dell'altra reciprocamente, come la velocità media di questa alla velocità media di quella. Le velocità medie poi delle bocche, posta la stessa altezza di queste, sono come le Parabole, o i Trapezj Parabolici, che sono scale delle velocità delle bocche medesime.

Ciò supposto si debba trovare la larghezza CD da darsi all'oncia Milanese rigurgitata CABD (Fig. 11.), perchè questa tramandi eguale quantità d'acqua, come se fosse libera. Poichè il Trapezio Parabolico, che è scala della velocità dell'oncia rigurgitata, l'abbiamo superiormente determinato per 6,02672, e il Trapezio Parabolico dell'oncia libera nel Cap. VI. l'abbiamo trovato 7,91234, si faccia come 6,02672 a 7,91234: così once tre larghezza dell'oncia Milanese ad un quarto, che sarà 3,93863, cioè once 3 punti 11, attomi 3 $\frac{1}{4}$, che sarà la larghezza da darsi alla bocca rigurgitata, perchè dia tant'acqua come l'oncia libera. Imperocchè moltiplicando 6,02672 per 3,93863, risulterà 23,73702, che è la precisa quantità d'acqua superiormente trovata al Cap. VI.

E siccome il Trapezio Parabolico, che è la scala della velocità del Quadretto Mantovano CABD (Fig. 12) agguaglia 29,57242, e il Trapezio di questo libero agguaglia 33,03652, facendo come 29,57242 a 33,03652, così once 12 larghezza CD del Quadretto ad un quarto, si troverà questo eguale a 13,4056746, cioè eguale ad once 13, punti 4 $\frac{5}{6}$ circa; e tale sarà la larghezza da

darsi al Quadretto rigurgitato perchè tramandi la stessa quantità d'acqua del libero. Infatti moltiplicando questa larghezza nuova trovata 13,4056746 per 29,57242 scala della velocità del Quadretto rigurgitato, si avranno per la quantità d'acqua once 396,43824, come si è trovato nel calcolo del Quadretto libero al Cap. VI.

Dovendosi determinare una bocca perchè trasmetta una data quantità d'acqua, sarà forse sempre da preferirsi l'aumentare, o diminuire la larghezza di questo, piuttosto che alterare la sua altezza; poichè la prima operazione come meno composta, sarà sempre più facile, e sicura della seconda.

CAPO IX.

Uso della Tavola Parabolica per calcolare la quantità d'acqua d'una luce, quando si dubita, che dal declive dell'alveo inferiore a questa, venga l'acqua accelerata.

Se le bocche, che danno l'acque ad un canale fossero sempre situate in un luogo molto più alto del canale, in cui vengono ricevute, sicchè da quelle in questo dovessero cadere, egli è certo, che quantunque grande fosse la pendenza del canale, che riceve l'acqua dalla luce, e quantunque con molta velocità per questo si movesse l'acqua, nè la troppa pendenza, nè la maggior celerità dell'acqua proveniente dalla pendenza potrebbe cagionare maggiore estrazione d'acqua d'una luce. Imperocchè l'acqua proseguirebbe a fluire per il lume con quella velocità, che a questa proviene o dalla attuale altez-

altezza d'acqua, che sta alla bocca, o dall' altezza equivalente: e facendo corpo separato l'acqua che esce dalla bocca, dall' acqua che scorre per l'alveo, non sarebbe possibile, che questa alterasse la velocità di quella. Ma stando la bocca immediatamente collocata al principio del canale inclinato, ed essendo la bocca stessa la prima sezione del canale medesimo, si può ragionevolmente dubitare, che la velocità dell' acqua, che esce dalla luce in tale situazione resti in qualche parte alterata, e accelerata. Il fondamento di questo dubbio desumesi dalle esperienze fatte dal Sig. Marchese Poleni, e nel suo Trattato *de Castellis* registrate, tra le quali alcune se ne hanno, in cui uscendo l'acqua per una luce rettangola tagliata in una sottil lastra di metallo, e verticalmente posta nel lato d'un vaso entrava in un canale aperto per dissopra della stessa larghezza colla luce, e col fondo paralello all' orizzonte, e della lunghezza di sei once. In sì fatto esperimento la quantità d'acqua, che si raccoglieva per questo canale in un dato tempo era alquanto maggiore, e per conseguenza maggiore la velocità, di quello che fosse, quando rimosso il canale si lasciava l'acqua liberamente sgorgare nell' aria a forma di getto. Un tale aumento di velocità non si può attribuire alla discesa dell' acqua per il canale; imperocchè il fondo di questo era orizzontale. Sembra dunque, che quest' aumento debba provenire da ciò, che anco nella stessa luce entrasse l'acqua con maggiore velocità di quello che avrebbe fatto senza il canale; e però che la sola apposizione del canale basti per accelerare l'acqua, che esce da una luce, e alterarle la sua velocità. Un eguale effetto probabilmente sarebbe per riuscire, e ancora molto maggiore se in luogo d'apporre ad una luce un canale orizzontale vi si apponesse un canale inclinato, sembrando, che in tal

positura, questo sarebbe per rapire seco, ed estrarre una molto maggior quantità d'acqua da un lume. (*a*)

Atteso dunque un sì fatto accidente, che maggior quantità d'acqua nello stesso tempo scarichi una luce, quando a questa è applicato un canale, che riceva l'acqua, di quel che scaricherebbe, se l'acqua dalla luce cadesse nell'aria libera a forma di getto, molto ragionevolmente cercasi come possa calcolarsi la quantità d'acqua, che esce da una luce, particolarmente quando questa viene ricevuta in un canale assai declive: poichè il non far conto d'una tal cosa potrebbe essere cagione di notabile errore nel determinare la giusta quantità d'acqua, che passa per un lume.

Dovrebbasi veramente quì prima d'ogni cosa assegnare qualche ragione, per cui possa spiegarsi, come succeda un tale fenomeno. Ma per non dilungarci di soverchio, potrassi vedere su questo proposito ciò, che dice il Sig. Zendrini al num. IV del Capitolo III. della sua Opera *Leggi*, *Fenomini* ec. pag. 53.

Volendosi dunque determinare la quantità d'acqua, che esce da una luce, e viene immediatamente ricevuta in un canale declive, non sarebbe, per quanto sembra, inopportuno il rimpiego di misurare coi metodi superiormente dati l'acqua, che dovrebbe uscire dalla luce sotto le date altezze reali, o equivalenti, i quali pre-

(*a*) N.E. Dopo la bellissima scoperta del Ch. Poleni sulle bocche armate di tubi, o di canali, le quali somministrano maggior copia d'acqua delle bocche nude, gli Idraulici furon, per qualche tempo di sentimento, che i tubi o canali producessero in virtù di loro atrazione una accelerazion nel getto: questo sentimento si vede, che anche dal N. A. è stato qui adottato. Essendosi però fatte in seguito molte e varie sperienze su i getti verticali, trovossi costantemente in questi, minor salita quando il foro era armato, che quando era nudo; quindi si conchiuse che i tubi o canali in luogo di cagionare nel getto accelerazione, vi cagionavan per contrario, colle scabrezze loro, un sensibile ritardo. Nelle stesse sperienze poi si è osservato che il getto nell'uscire da' tubi ci presentava una vena molto meno contratta che nell'uscire da' fori nudi; onde gli Idraulici, al presente, convengon tutti nel derivare la maggior copia d'acqua, delle bocche armate di tubi o di canali, dall'allargamento della vena. Con tutto ciò il metodo, che viene in seguito del N. A. è egualmente applicabile tanto al sentimento primo, come al secondo.

scindono dall' alterazione, che può provenire alla quantità d'acqua dalla pendenza del canale, e d'indi misurare di nuovo co' metodi medesimi la stessa quantità d' acqua, entrata che questa sia nel canale, per confrontarne l'una con l'altra, e riconoscere se quella quantità, che sta nel canale sia maggiore di quella, che dovrebbe uscire dalla bocca, se la velocità di questa non fosse accresciuta dall' apposizione del canale.

Ma per applicare ogni cosa ad un' esempio, l'oncia Milanese, che ha le due once d'altezza d'acqua di battente, tramanda, come superiormente si è trovato, once d'acqua 23,73702. L'acqua che esce da questa bocca sia ricevuta in un canale pendente largo sei once. Attualmente misurando l'altezza viva, sotto cui l'acqua scorre per il canale, sia questa once tre, e mezzo, e la velocità, con cui si muove in superficie misurata col galeggiante, o col pendolo nasca dall' altezza equivalente di punti quattro, sicchè l'altezza intiera sia once tre, e punti dieci, oppure punti quarantasei. La parabola dell' altezza 46 sarà 207,99146, e la parabola dell' altezza 4 sarà 5,33333, la quale sottratta dalla prima lascierà per il Trapezio Parabolico, che è la scala della velocità 202,65813, e moltiplicando questo numero per once sei, ridotte a punti 72, che sono la larghezza del canale, si avranno per la quantità d'acqua, che scorre per esso punti cubici 14591,38536, che fanno once cubiche 29, 25121. Riuscirebbe dunque in questo caso la quantità d'acqua, che trovasi nel canale maggiore d'once 5 $\frac{51419}{100000}$ di quella che somministrerebbe la bocca, se la sua velocità non venisse aumentata dalla pendenza del canale.

Quindi per moderare la maggiore quantità d'acqua, che esce dall' oncia a cagione del canale inclinato, potrebbesi restringere la sua larghezza, non alterando la

sua altezza. Ma per diminuirla quanto richiede il bisogno, e nulla più, conviene riflettere, che le diverse quantità d'acqua, che sgorgano dalla stessa luce, o da due luci eguali nello stesso tempo, devono essere nella proporzione delle velocità: perlocchè nel caso nostro la quantità d'acqua, che sgorga dall'oncia Milanese, supposto a questa applicato il canale inclinato, alla quantità d'acqua, che quella tramanda senza canale, deve essere come la velocità, che ha dall'altezza reale, o equivalente aumentata della velocità proveniente dalla pendenza del canale alla velocità, che deriva dalle sole sopradette altezze. Per la qual cosa in tale proporzione sarà la quantità d'acqua 29,25121 trovata, supposto il canale, alla quantità d'acqua 23,73702 senza il canale. Perchè poi una bocca, o più bocche dell'istessa altezza, ed ineguale larghezza nello stesso tempo tramandano eguali quantità d'acqua, allorchè le velocità sono reciprocamente come le larghezze, facendo la proporzione, come la quantità d'acqua 29,25121 tramandata dall'oncia nel canale inclinato a 23,73702 quantità d'acqua dell'oncia senza canale, così once 3 larghezza dell'oncia Milanese ad un quarto numero troverassi 2,43446, cioè once due con 43446 centomilesimi, che saranno la larghezza da darsi all'oncia Milanese, perchè scorrano per essa in circa once cubiche ventitrè, 73702 centomilesimi, sebbene ad esso vi sia apposto il canale inclinato.

Nel fatto calcolo si suppone, che non ostante la larghezza dell'oncia diminuita, la pendenza del canale apposto estragga dalla bocca la stessa quantità d'acqua di più della dovuta, che estraeva prima della diminuzione della larghezza di questa. Ciò forse potrà patire qualche eccezione; ma non trovandosi miglior modo di calcolar l'acqua nel proposto caso, si potrà a questo

attenersi. Bisognerà bensì, per non commettere abbaglio nel calcolar l'acqua, che scorre nel canale, diligentemente riconoscere l'altezza viva dell'acqua (*a*), e prendere la media altezza, siccome pure la media velocità, e la media larghezza del canale medesimo.

È cosa certa, che da una bocca di maggior altezza, e di maggiore larghezza scorre sempre nello stesso tempo maggiore quantità d'acqua di quella, che esca da una bocca minore, se non per altro almeno per cagione de' minori soffregamenti, che dagli orli, e pareti del foro soffre quella rispetto a questa. Per la qual cosa se in luogo d'una bocca d'un oncia Milanese, o d'un Quadretto Mantovano, si vorrà una bocca d'once tre Milanesi, oppure una bocca di tre Quadretti Mantovani, e a questo fine lasciando la stessa altezza dovuta tanto all'oncia, quanto al Quadretto, si faranno triplici le larghezze cioè nuove once l'una, e trentasei once l'altra, la quantità d'acqua, che scorrerà dalla bocca tripla dell'oncia Milanese, sarà più di tre volte l'acqua, che scorre nello stesso tempo dall'oncia, e così la quantità d'acqua, che scorre dalla bocca tripla del Quadretto Mantovano sarà più di tre volte quella, che da il Quadretto Mantovano nel tempo medesimo. A questo eccesso d'acqua si potrà rimediare col metodo, poco anzi dato di misurare di nuovo l'acqua, che scorre nel canale, e restringere la larghezza della bocca, facendo come la quantità d'acqua trovata al triplo della quantità d'acqua, che trasmette l'oncia Milanese, o il

(*a*) Per altezza viva dell'acqua si deve intendere quella parte dell'altezza, che nella data sezione resta superiore al fondo regolare del Fiume, e resta eziandio superiore al livello del recipiente d'esso Fiume per modo, che cessando per avventura il corso del Fiume, niente rimanga d'acqua in quella parte della sezione. Si potrebbe quest'altezza viva esplorare colla palla sospesa ad un filo di conosciuta lunghezza, la quale immersa gradatamente nell'altezza dell'acqua della sezione deviando dal perpendicolo, ci farà conoscere dove l'acqua ha movimento, e non deviando dal perpendicolo, c'indicherà dove è ferma.

Quadretto Mantovano, così 9 larghezza della bocca di tre once Milanesi, oppure 36 larghezza di tre Quadretti Mantovani ad un quarto numero, che sarà la larghezza da sostituirsi tanto alla bocca, che deve dare tre once d'acqua Milanesi, quanto alla bocca, che deve somministrare tre Quadretti d'acqua Mantovani. Sarà però più comodo nel caso di dover distribuire due, tre o quattro once Milanesi d'acqua, o altrettanti Quadretti Mantovani di seguire l'insegnamento del Guglielmini, il qual vuole, che si facciano due, tre, o quattro fori eguali al foro dell'oncia, o del Quadretto del tutto simili, e che questi sieno tutti egualmente posti sotto la superficie dell'acqua, sicchè tutte queste bocche godano la stessa altezza d'acqua.

CAPO X.

Uso della Tavola Parabolica per calcolare la quantità d'acqua relativamente.

Si è già detto altrove, che per misurare una quantità d'acqua con misura relativa altro non richiedesi, che di determinare la proporzione, la quale ha una quantità d'acqua, che esce da una luce di una data grandezza in un dato tempo ad un' altra quantità d'acqua, che esce da un' altra luce parimente di data grandezza in un tempo ancora dato. Ogni cosa dunque consiste nel trovare le parabole, o i trapezj parabolici, che sono scale delle velocità delle luci, e queste moltiplicarle per le rispettive larghezze, e per i rispettivi tempi, ne' quali l'acqua per ciascuna luce dura a scorrere; che così risulteranno de' prodotti rappresentanti le quantità d'acqua

dell'una, e dell'altra luce. E se si dividerà il prodotto maggiore per il minore, il numero quoziente, che ne verrà, ci farà manifesto quante volte la minore acqua sia contenuta nella maggiore, e però quante volte una ecceda l'altra.

Sieno pertanto le due luce CABD, HGIL, (Fig. 13) la prima delle quali sia l'oncia Milanese colle due once AE di battente, che duri a scorrere per un minuto d'ora, e la seconda sia di cinque once di larghezza, e di altezza con tre once GM di battente, e duri a mandar acqua per due minuti d'ora. Cercasi quale sarà la proporzione, che avranno le quantità d'acqua scaricate da queste luci.

CALCOLO DELLA PRIMA LUCE.

Altezza CE once 6	Prodotto 14,69694	Parab.	9,79796
Altezza AE once 2	Prodotto 2,82842	Parab.	1,88562
		Trapezio Parabolico	7,91234
		Larghezza CD - - -	3
		Prodotto	23,73702
		Tempo	1
		Quantità d'acqua once cubiche	23,74702

CALCOLO DELLA SECONDA LUCE.

Altezza HM once 8	Prodotto 22,62744	Parab.	15,08496
Altezza GM once 3	Prodotto 5,19615	Parab.	3,46410
		Trapezio Parabolico	11,62086
		Larghezza HL - -	5
		Prodotto	58,10430
		Tempo	2
		Quantità d'acqua once cubiche	116,20860

È dunque la quantità d'acqua scaricata dall' oncia Milanese in un minuto d'ora alla quantità d'acqua scaricata dalla seconda luce in doppio tempo come 23,73702, a 116,20860, e siccome dividendo questo secondo numero per il primo risulta di quoziente 4,89567, da ciò si deduce essere la quantità d'acqua scaricata dalla luce maggiore quasi quintupla di quella che scarica l'oncia Milanese. Se i tempi della durata a scorrere fossero stati eguali le quantità d'acqua uscite sarebbero state come 23,73702, e 58,10430.

Devesi quì avvertire, che trattandosi di calcolare le quantità d'acqua relativamente, e non assolutamente sarà la stessa cosa il prendere i prodotti corrispondenti all' altezze della Tavola Parabolica in luogo delle parabole, e i residui de' prodotti in luogo de' trapezj; poichè i prodotti sono nella stessa proporzione delle parabole, e i residui de' prodotti sono nella stessa proporzione de' trapezj parabolici.

Sieno ora le due luci CABD, HGIL, (Fig. 14.) la prima delle quali sia il Quadretto Mantovano colle due once AE di battente, e l'altra abbia la larghezza HL d'once 15, e l'altezza GH d'once 16, e il battente GM d'once 5. Cercasi la proporzione delle quantità d'acqua da esse scaricate nel mdesimo tempo.

CALCOLO DELLA PRIMA LUCE.

Altezza CE once 14.	Prod. 52,38324.	Parab.	34,92216
Altezza AE once 2.	Prod. 2,82842.	Parab.	1,88562
		Trapezio Parabolico	33,03654
		Larghezza CD - -	12
		Quantità d'acqua once cubiche	396,43848

CAL-

CALCOLO DELLA SECONDA LUCE.

Altezza HM once 21. Prod. 96,23397. Parab.		64,15598
Altezza GM once 5. Prod. 11,18035. Parab.		7,45357
	Trapezio Parabolico	56,70241
	Larghezza HL - -	15
. Quantità d'acqua once cubiche		850,53615

Dividendo dunque il prodotto 850,53615 per il prodotto 396,43848 si avrebbe di quoziente 2,14544. Quindi l'acqua scaricata dalla luce GHLI sarebbe all' acqua scaricata nel medesimo tempo dal Quadretto CABD, come 2,14544 a 1.

Non sarà fuori di proposito avanti di dar fine a questo capo il ricercare quale proporzione abbia il Quadretto d'acqua Mantovano all' oncia d' acqua Milanese, ossia a quante once d'acqua Milanesi equivalga un Quadretto Mantovano. Imperocchè una sì fatta cognizione potrà servire per l'intelligenza di varie cose da dirsi in seguito. Per poter ridurre la quantità d'acqua del Quadretto Mantovano alla quantità d'acqua dell' oncia Milanese è necessario prima d'ogni cosa di ridurre il braccio Mantovano al braccio Milanese.

Il piede di Parigi comunemente si suppone diviso in mille quattrocento quaranta parti eguali, che si chiamano particole. Di queste particole ne contiene due mille seicento trentasette, e tre decimi il braccio di Milano, e due mille sessantanove, e cinque decimi il braccia Mantovano. La proporzione dunque del braccio Milanese al Mantovano è come 2637, 3 a 2069, 5. Facendo pertanto la proporzione come 26373 a 20695,

così 12 once ad un quarto si troverà, che 12 once Mantovane agguagliano once Milanesi 9, e punti 5, ossia punti Milanesi 113 in circa, e per conseguenza due once Mantovane punti diecinove Milanesi circa. Ciò supposto il Quadretto Mantovano ha 113 punti d'altezza, e di larghezza, e punti 19 di battente in misura Milanese.

Sarà dunque l'altezza intera dell'acqua del Quadretto punti 132 di misura Milanese. Si cerchino nella Tavola Parabolica le altezze 132, e 19, e le corrispondenti parabole; e si calcoli la quantità d'acqua con queste misure, che essa si avrà in misura Milanese, e confrontandola con la quantità d'acqua dell'oncia Milanese si avrà la proporzione, che ha l'una all'altra.

CALCOLO.

Altezza 132. Parabola	1011,04256
Altezza 19. Parabola	55,21274
Trapezio parabolico	955,82982
Larghezza - - - -	113

Quantità d'acqua, punti cubici 108008,76966

Ridotti questi punti ad once cubiche danno once cubiche 216,52420. E dividendo 216,52420 quantità d'acqua del Quadretto data in once cubiche Milanesi per 23,73702 misura della quantità d'acqua dell'oncia Milanese, risulterà di quoziente 9,12179, il quale indicherà essere la quantità d'acqua, che da il Quadretto Mantovano eguale a nove once d'acqua Milanesi, 12179 centomilesimi.

CAPO XI.

Uso della Tavola Parabolica per calcolare la quantità d'acqua assolutamente.

Il calcolo d'una quantità assoluta d'acqua, che sgorga da una luce, o sezione in un dato tempo richiede, che si determini in una nota misura la quantità d'acqua, che in quel tempo la luce, o sezione tramanda; come per esempio, che la quantità d'acqua sia sei piedi cubici, sei quadretti, sei botti, o cento libbre. A formare un tal calcolo però non si può giugnere senza, che preceda un qualche dato dall' esperienza dedotto della quantità d'acqua, che manda un foro di data grandezza in un dato tempo. Quello che forse maggiori esperienze abbia fatto in questo proposito, e con più diligenza è stato il celebre esperimentatore Monsieur Mariotte. Una dunque delle sue esperienze potrà da noi determinarsi qual fondamento de' nostri calcoli delle quantità d'acqua assolute. E questa potrà essere quella, che leggesi tra l'opere dell'Autore stampate in Leida nella parte terza del trattato del *Movimento dell'Acque, Discorso primo, Esperienza* I. pag. 412, poichè essa viene da lui registrata con tutte le cautele usate, ed è stata dal medesimo più volte ripetuta, e assegna in essa ancora la media quantità d'acqua tra le diverse uscite dallo stesso foro nelle varie repliche fatte dell' esperimento. L' esperienze in questo consiste, che essendosi in una delle pareti verticali d'un vaso paralellepipedo fatta un' apertura quadrata di sedici linee francesi in circa di larghezza, a cui fu applicata esattamente una lastra avente un foro circolare d'un pollice di diametro, il quale restava costantemente immerso per una linea in circa sotto

la superficie dell'acqua contenuta nel vaso, fu osservato quant' acqua trasmettesse nel tempo di sessanta minuti secondi, o d'un minuto d'ora, e si trovò, che queste erano tredici pinte, e tre ottavi di misura di Parigi, ciascuna delle quali pesava due libbre meno sette grossi, otto de' quali fanno un' oncia, come dice l'autore dell' Esperimento. Sarà però più esatta la misura della pinta di cui parla il Mariotte, se si calcolerà per una libbra Francese, quattordici once, e sette grossi, e mezzo, oppure per grani 17814 $\frac{1}{2}$, siccome viene calcolata da M. Picard nel Tomo 4 *delle memorie dell' Accademia delle Scienze avanti il rinnovellamento del* 1699 pag. 324. Quindi stando a questo calcolo la quantità d'acqua uscita da questo foro in un minuto d'ora è stata in circa libbre Francesi venticinque con ottantaquattro centesimi, ciascuna delle quali agguàlia sedici once Francesi.

Ma supposta una tale esperienza per poter far uso di questa nella ricerca della quantità assoluta dell' acqua, che sgorga da una luce qualunque è necessario, che si sappia trovare la quantità d'acqua, che uscirebbe in un dato tempo da un foro quadrato posto verticale di dodici linee Francesi di lato, alla base del quale sovrastino parimente dodici linee d'altezza d'acqua; la quale ricerca ci obbliga poi a premetterne un' altra, che sono per dire.

La quantità d'acqua di libbre 25 84 uscita dal foro dell' esperimento Francese nel tempo d'un minuto d'ora è da esso sgorgata sotto l'altezza di tredici linee, poichè all' apertura del foro sovrastava in circa una linea d'acqua, che formava battente. Deve dunque essere uscita da questo foro in un minuto d'ora qualche maggiore quantità d'acqua di quella, che sarebbe da esso trascor-

sa nello stesso tempo, se il foro medesimo fosse stato appena sommerso sotto la superficie dell' acqua, o se l'altezza dell' acqua fosse stata solo dieci linee: e questa maggiore quantità d'acqua uscita deve determinarsi prima di procedere avanti. Per la qual cosa conviene ricorrere alla Tavola Parabolica, e così argomentare. Il prodotto corrispondente all' altezza di linee 13 agguaglia 46,87215. Il prodotto corrispondente all' altezza del battente di una linea agguaglia 1, e sottratto questo secondo prodotto dal primo, il residuo è eguale a 45,87215, il qual numero rappresenta in astratto la quantità d'acqua uscita dal foro Francese, avendo questo una linea di battente. Ma il prodotto corrispondente all' altezza di linee 12 agguaglia 41,56920, il qual numero rappresenta in astratto la quantità d' acqua che uscirebbe dal foro dell' esperimento Francese nello stesso tempo, se la sua altezza d'acqua fosse di linee 12. Dunque sarà come il numero 45,87215 a 41,56920, così le libbre Francesi 25 84 alle libbre 23,41612, che darebbe il foro dell' esperimento Francese nel tempo d'un minuto d'ora essendo esso appena sommerso sotto la supeficie dell' acqua.

Dopo una tale notizia, che il foro dell' esperimento Francese appena sommerso sotto la superficie dell' acqua darebbe in un minuto d'ora libbre Francesi 23,41612, piana è la strada per trovare la quantità d' acqua, che deve dare nello stesso tempo un foro quadrato di dodici linee Francesi di lato, appena parimente sommerso sotto la superficie dell' acqua. Imperocchè egli è dimostrato, che l' acqua la quale esce da un foro circolare sta all' acqua, che uscirebbe da un foro quadrato, che avesse per lato il diametro del cerchio stesso in tempo medesimo nella proporzione di 4 a 5. Ora ciò posto facendo 4 a 5 come 23,41612, 29,27015 sarà l' acqua che esce da un foro quadrato di 12 linee di Parigi di lato libbre 29,27015.

Determinata pertanto la quantità assoluta d'acqua, che tramanda un foro quadrato d'un pollice Francese, o dodici linee di lato in un minuto d'ora per libbre Francesi 29,27015 facile cosa sarà a trovarsi qual quantità d'acqua in un minuto d'ora tramandi un foro quadrato d'un oncia Milanese, o dodici punti di lato, oppure un foro quadrato d'un oncia Mantovana, o dodici punti parimente di lato. Ma a questo fine conviene prima cercare qual proporzione abbia l'oncia lineare Milanese, e la Mantovana al pollice di Parigi. Da noi però nel capo VII. sono già state assegnate queste proporzioni, ed ivi si è detto, che il braccio Milanese è al piede di Parigi come 1152 a 629, e il braccio Mantovano allo stesso piede come 2069,5 a 1440. Quindi nella stessa proporzione saranno ancora l'oncia Milanese al pollice di Parigi, e l'oncia Mantovana allo stesso pollice, essendo le once la dodicesima parte de' rispettivi bracci, e il pollice la dodicesima parte del piede parigino.

Supposto dunque che il pollice Francese sia all'oncia Milanese come 629 a 1152, e lo stesso pollice all'oncia Mantovana come 1440 a 2069,5, in questa guisa per mezzo della Tavola Parabolica si troverà la quantità d'acqua, che in un minuto d'ora sgorga da un foro quadrato d'un' oncia tanto Milanese, quanto Mantovano di lato. Si cerchi nella Tavola Parabolica l'altezza 629 a cui corrisponde il prodotto 15775,23823, e si moltiplichi questo prodotto per 629; che si avrà 9922624, 84667. Si cerchi di nuovo nella Tavola Parabolica l'altezza 1152, che ha per prodotto corrispondente 39100, 17024, e questo pure si moltiplichi per 1152, che risulterà 45043396, 11648. D'indi si faccia la proporzione come 9922624, 84667 a 45043396, 11648, così 29,27015 ad un quarto numero, che sarà 132,87078, e cento trentadue libbre Francesi con 87078 centomile-

simi sarà la quantità d'acqua, che uscirà in un minuto d'ora dal foro quadrato, che ha per lato l'oncia Milanese.

Non altrimenti si troverà essere la quantità d'acqua, che manda in un minuto d'ora un foro quadrato del lato di un' oncia Mantovana libbre Francesi 72,47387, se si formeranno i prodotti delle altezze 1440, e 20695, che sono 54644, 15520, e 94145, 17662, e questi si moltiplicheranno per 1440 il primo, e 2069,5, il secondo, e di poi si farà la proporzione come il primo al secondo prodotto, così libbre Francesi 29,27015 a 72,47387.

La proporzione, che quì si è stabilita è fondata su questo principio, che i prodotti della Tavola Parabolica moltiplicati per la larghezza delle bocche rappresentano in astratto de' numeri proporzionali alle quantità d'acqua, che escono per quelle bocche. Quindi nel caso nostro il numero, per esempio 9922624, 84667 rappresenta la quantità d'acqua in astratto, che esce dal quadrato d'un pollice di sei parti d'altezza, e altrettante di larghezza, e il numero 45043396, 11648 rappresenta in astratto la quantità d'acqua, che esce dal quadrato d'un' oncia Milanese ridotta ad una misura comune col pollice Francese; onde come sono queste due quantità d'acqua in astratto tra loro, così deve essere la quantità assoluta d'acqua di libbre Francesi 29, 27015, che dà il pollice Francese alla quantità d'acqua assoluta di libbre Francesi 132, 87078, che da l'oncia Milanese.

Essendosi in tal guisa fissata la quantità d'acqua assoluta, che tramanda il foro quadrato d'un' oncia Milanese di lato in un minuto d'ora per libbre Francesi 132, 87078, e quella che tramanda il foro quadrato d'un' oncia Mantovana nel medesimo tempo per libbre Francesi 72, 47387, conviene ora avvertire, che la quantità d'acqua, la quale esce dal foro quadrato del lato

d'un' oncia Milanese calcolata colla Tavola Parabolica non è, che due terzi d'un' oncia cubica Milanese, e così la quantità d'acqua, che esce nello stesso tempo dall' oncia Mantovana calcolata colla medesima tavola, non è, che due terzi d'un oncia cubica Mantovana. Per la qual cosa, affine d'avere la quantità d'acqua, che compete in un minuto d'ora all' oncia cubica intiera tanto Milanese, quanto Mantovana, sarà necessario aumentare per la prima le libbre Francesi 132, 87078 della sua metà, e per la seconda le libbre Francesi 72, 47387 parimenti della sua metà, sicchè la quantità d'acqua assoluta dovuta ad ogni oncia cubica Milanese riesca libbre Francesi 199, 30617, e la quantità d'acqua assoluta dovuta a ciascuna oncia cubica Mantovana sia libbre Francesi 108, 71081.

Ciò supposto nessuna difficoltà potrà più incontrarsi nel determinare la quantità d'acqua assoluta, che sgorga in un dato tempo da qualunque bocca. Imperocchè basterà moltiplicare la quantità d'acqua di quella bocca avuta in astratto per mezzo della Tavola Parabolica per il tempo della durata a scorrere, e per il numero delle libbre Francesi, che è dovuto ad ogni oncia cubica, e il prodotto sarà la quantità d'acqua assoluta dovuta nel dato tempo a quella bocca.

Se dunque dovrà calcolarsi la quantità assoluta dell' acqua, che esce in un minuto d'ora dall' oncia Milanese di tre once di larghezza, e quattro d'altezza, e due di battente; poichè questa si è superiormente trovata in astratto once cubiche 23, 73702, si moltiplichi questo numero per libbre Francesi 199, 30617, che sono dovute ad ogni oncia cubica, e sarà il prodotto libbre Francesi 4730, 93454, e tanta sarà la quantità d'acqua, che si scaricherà dall' oncia d'acqua Milanese in un minuto d'ora. Che se questo numero di libbre moltiplicheche-

cherassi per 60 minuti, tempo d'un ora, risulteranno libbre Francesi 283856,07260, che da essa si scaricheranno in un' ora.

Così dovendosi calcolare la quantità assoluta dell' acqua, che esce in un minuto d'ora dal Quadretto Mantovano largo e alto dodici once Mantovane con due once di battente, basterà moltiplicare la quantità d' acqua trovata in astratto col mezzo della Tavola Parabolica, che è once cubiche Mantovane 396, 43824 per 108, 71081, che è la quantità di libbre Francesi dovute ad ogni oncia cubica Mantovana, e il prodotto 43097,12218 sarà tante libbre Francesi, che determinano la quantità assoluta d'acqua del Quadretto Mantovano in un minuto d'ora. E quest' istesso prodotto moltiplicato per 60, cioè 2585827, 33112 determina la quantità delle libbre Francesi, che dal Quadretto escono in un' ora.

Ma acciocchè non rechi noja ad alcuno la quantità d'acqua assoluta superiormente calcolata in libbre Francesi, s'avverta, che la libbra Francese è composta d'once sedici, e la libbra Milanese d' once ventotto, e che il marco Francese composto d' otto once Francesi con cui si pesa l' oro, e l' argento eguaglia prossimamente nove once Milanesi (*a*). Per la qual cosa la libbra Francese, che è eguale a sedici once, ossia a due marchi eguali a once diciotto Milanesi, onde la proporzione della Francese alla grossa Milanese è come 18 a 28, ovvero come 9 a 14. Se si farà dunque la proporzione come 14 a 9, così 199,30617, che sono le libbre Francesi dovute in un minuto d'ora ad un' oncia cubica Milanese, ad un quarto: sarà questo 128,12539, e a cento vent' otto libbre Milanesi con 12539 centomillesimi

(*a*) Il rapporto esato della libbra Francese di once 16 alla libbra Milanese di once 28 è come 1 a 1,55773072869.

saranno eguali le libbre Francesi 199, 30617. Quindi se il numero 128, 12539 si moltiplicherà per il numero 23, 73702, che è la quantità d'acqua astratta dell' oncia d' acqua Milanese, si avranno libbre d' acqua Milanesi 3041, 31494 per la quantità assoluta, che si ha dall' oncia Milanese d' acqua in un minuto primo d' ora. Le libbre Francesi 108, 71081, che competono ad un' oncia cubica Mantovana in un minuto primo d' ora equivalgono a libbre Milanesi d' once vent' otto 69, 88552, le quali eguagliano once Milanesi 1956, 79456, ma once vent' otto Milanesi eguagliano once 29, 53439 Mantovane, dunque facendosi come 28 a 29, 53439, così 1956, 79456 al quarto 2064, 02620 queste saranno le once Mantovane eguali alle once Milanesi 1956, 79456. E perchè la libbra Mantovana non è che di once 12 Mantovane, le once 2064, 02620 divise per 12 saranno eguali a libbre Mantovane 172, 00218, e queste agguaglieranno le libbre Francesi 108, 71081, e le libbre Milanesi 69, 88552, le quali si debbano all' oncia cubica Mantovana in un minuto d'ora. Per la qual cosa moltiplicando 396, 43824 quantità astratta del Quadretto Mantovano per libbre Mantovane 172, 00218, si avranno libbre 68188, 24152, che saranno la quantità assoluta dell' acqua, che da il Quadretto Mantovano in un minuto d' ora computata in libbre Mantovane di once 12 per ciascuna (*a*).

(*a*) Nello stabilire la proporzione delle libbre Francesi alle Milanesi, e Mantovane si è supposto, che il piede cubico Francese contenga in circa libbre Francesi d' acqua 69, 59, secondo Mr. Picard nel Tomo 4 *delle Memorie dell' Accademia delle Scienze avanti il Rinnovelamento* pag. 324, sebbene commemente si ponga contenerne settanta.

Se riuscisse più comodo calcolare l'acqua in braccia cubiche, o quadretti d' acqua tanto Milanesi, che Mantovani piuttosto che in libbre, notisi che la luce di un' oncia quadrata tanto Milanese, quanto Mantovana non dà in un minuto primo d' ora, che due terzi dell' oncia cubica superiormente ritrovata di 128, 12539. e 172, 00218. cioè la prima libbre grosse Milanesi 85, 41693; e la seconda libbre Mantovane 114, 66812. Moltiplicando dunque l'una, e l'altra somma di libbre per 60 minuti primi d'ora, risulterebbe la prima di libbre 5125, 01580, e la seconda libbre 6880, 08720. Un vaso cubico d' un braccio Milanese contiene libbre grosse Milanesi circa 267, 5616: e un vaso cubico d'un braccio Mantovano contiene libbre Mantovane 320, 3036. Dividendo pertanto le libbre

5125

Dall' esperimento di M. Mariotte si deduce dunque, che la quantità d' acqua, che scorre per il foro dell'oncia d'acqua Milanese in un minuto d'ora è libbre Milanesi di 28 once 3041, 31494. Se queste libbre si ridurranno alla misura, con cui misurasi il vino in Milano, che volgarmente *Brenta* si chiama, la quale contiene novantasei boccali, e ciascun boccale contiene una libbra Milanese d' once 28, equivaleranno le libbre 3041, 31494 a misure, o brente 31, 68036. Per assicurarsi se una tale quantità d'acqua s' approssimava alla quantità d'acqua, che scorre realmente dall' oncia Milanese in un minuto d'ora, si è stimato bene di far preparare un vaso cubico atto a contenere misure o brente trentatrè e mezza in circa d' acqua, siccome pure una lamina di ferro, in cui era intagliato il foro dell' oncia Milanese, l'altezza del quale era divisa in once quattro, e superiormente ad esso v' erano segnate ancora le due once di battente. Tali cose disposte furono trasportate al sito d'un canale, come sarebbe ABCD, (Fig. 15) in cui scorreva l' acqua da A verso D, e dove eravi il canale FEGH, per il quale si poteva estrarre acqua per irrigare un prato adjacente. Si fece ivi piantare nel sito FE l'oncia Milanese, e al di sotto di questa nel canale FEGH si fece scavare terra per formare una buca, che conte-

---

5125, 01580 per 267, 5616, si ha per il quoto 19, 15452, cioè diecinove braccia, o quadretti cubici con 15452 centomillesimi, e dividendo parimenti le altre 6880, 08720 per 320, 30360, sorte per il quoto 21, 47989, che sono ventuno braccia, o quadretti cubici Mantovani con 47989 centomillesimi; ma se la luce che da due terzi d' oncia d'acqua ogni minuto primo somministra in un' ora quadretti cubici Milanesi 19, 15452, e Mantovani 21, 47989; un' altra luce dalla quale sorta ogni minuto primo d'ora un' oncia cubica d'acqua Milanese, o Mantovana dovrà estrarre in un' ora un numero di quadretti Milanesi, e Mantovani, che stiano a primieri nella proporzione di 2 a 3. Sono dunque i quadretti cubici dovuti ad ogni oncia cubica Milanese in un' ora 28, 73178, e ad ogni oncia cubica Mantovana nello stesso tempo 32, 21983. Quindi moltiplicando le quantità astratte 23, 73702 dell' oncia d' acqua Milanese, e le 396, 43824 del Quadretto Mantovano, la prima per 28, 73178, e la seconda per 32, 21983. Si avranno le quantità d'acqua derivanti dall' una, e dall' altra bocca nello spazio di un' ora: e saranno queste quadretti Milanesi 682, 00683, e Mantovani 12773, 17270.

nesse il vaso cubico in una maniera comoda per ricevere l'acqua che doveva uscire dalla luce. Indi chiudendo il foro dell'oncia Milanese, e il canale ABCD nel luogo CD per far rialzare l'acqua fino a tanto che essa giungesse a dare l'once due di battente al foro dell'oncia, quando si osservò l'acqua alzata al segno ricercato, si adattò alla bocca un canale di legno, che potesse, aperta la bocca, trasportare l'acqua oltre il vaso cubico nel canale FEGH, senza che nel vaso n'entrasse. E ciò fu fatto affine d'assicurarsi, che stando la bocca aperta, l'acqua si conservasse tant' alta, quanto bastava a mantenere le due once di battente. Aperta pertanto la bocca dell'oncia; e veduta costante l'altezza dell'acqua si fece con tutta prestezza levare dalla bocca il canale di legno, perchè l'acqua entrasse nel vaso cubico, e nello stesso tempo s'incominciarono a contare i colpi, che davano le palettine del fuso, o asta del tempo d'un orologio da saccoccia, urtando ne' denti della ruota serpentina, e questi colpi si contarono fino a cento, perchè si sapeva per osservazione, che cento colpi in circa equivalevano ad un minuto d'ora. Si trovò dunque, che l'acqua uscita dal vaso nel fine di questo tempo fu circa brente trentadue per quello, che si potè riconoscere da quell'acqua, che ancora mancava per riempire il vaso (*a*). La quantità d'acqua raccolta in un minuto d'ora dall'oncia d'acqua Milanese, che è assaissimo conforme con quella che si è calcolata sul fondamento dell'esperimento di Monsieur Mariotte abbastanza prova l'esatezza di questo, e dà una regola per determinare la quantità d'acqua assoluta, che in un dato tempo può uscire da una luce.

(*a*) In questo Esperimento l'acqua cadeva dalla luce nel vaso a forma di getto: e il perimetro del foro scolpito nella lastra di ferro, per cui passava l'acqua, era men largo d'una mezza linea Francese.

CAPO XII.

Quale quantità d'acqua richiedesi per adacquare una data quantità di Terreno.

La quantità d'acqua, che ricercasi per adacquare un dato terreno, assaissimo dipende dal terreno medesimo, e dalla maniera colla quale questo è disposto. I terreni altri sono d'un fondo arenoso, altri d'un fondo forte, ed altri d'un fondo paludoso; altri disposti a prato, ed altri arati, e seminati a riso, o altre biade; altri nella loro superficie regolari, altri irregolari, ed altri finalmente, che hanno la loro superficie notabilmente inclinata all'orizzonte. Egli è certo, che maggior acqua vi vorrà per adacquare un dato numero di pertiche di terreno arenoso, ed acqua minore per adacquare lo stesso numero di pertiche d'un terreno più forte; perchè il primo più poroso maggiore quantità ne assorbisce del secondo meno poroso, e minore quantità d'acqua vi vorrà per adacquare lo stesso numero di pertiche di un terreno, che abbia del paludoso, e che già sia inzuppato d'acqua. Non altrimenti accaderà, che minor acqua sarà necessaria per adacquare lo stesso terreno posto a prato, e maggiore per adacquarlo arato, perchè la terra smossa maggiormente s'imbeverà d'acqua, e maggiore ancora per adacquarlo posto a riso, imperocchè, secondo la consuetudine di chi abbonda d'acqua, sempre ad esso viene somministrata nuova acqua, sebbene quelli che ne scarseggiano, s'acconsentino di dargliela una volta ogni tanto tempo. Così minor acqua richiederassi per adacquare lo stesso terreno ben disposto, e spianato, che per adacquarlo irregolare, e male spianato: poichè nel primo caso si spanderà liberamente

l'acqua da ogni parte, e nel secondo caso dappertutto sarà trattenuta da' dossi ed obbligata a fermarsi ne' luoghi bassi con dispendio di tempo, e d'acqua; e minore quantità ancora vi vorrà per adacquare un terreno assai pendente; imperocchè a cagione della pendenza velocemente si trasporterà l'acqua d'una parte all'altra successiva del terreno, e prestamente tutto lo scorrerà. Anzi perchè ciò non succeda troppo precipitosamente suolèsi mandar l'acqua su questi terreni per piccioli, e spessi canaletti, i quali la trasportano bensì con prestezza ma non la precipitano.

Ma per dire alcuna cosa più precisamente su questo punto egli è necessario di ricorrere all'esperienza: Due esperienze si sono fatte su questo proposito: una è stata di adacquare coll'oncia Milanese un prato di circa venti pertiche Milanesi di un terreno sabbioso, e non troppo ben disposto nella sua superficie; e tutto questo si è potuto adacquare con essa, sebbene fosse per qualche parte rigurgitata, nello spazio d'undici ore computate dopo il tempo dell'invasazione, e da quel punto in cui l'acqua cominciò a scorrere sul prato. L'altra esperienza fu, che colla stessa oncia Milanese nel tempo d'ore otto, dopo essere stata fatta l'invasazione, si adacquarono in circa pertiche dodici Milanesi di terreno arato, e seminato a lino. Stando pertanto a queste esperienze si dedurebbe, che l'oncia Milanese in un giorno naturale adacqua pertiche Milanesi 43 $\frac{63}{100}$ di prato sabbioso, e poco regolare, e pertiche 36 di terreno arato (*a*). E perchè la quantità d'acqua del Quadretto

(*a*) N. E. In ambedue queste sperienze, che son forse le sole, che noi abbiamo in questo genere s'è tenuto conto soltanto del primo adacquamento; ma ognun sa che sul terreno, che si vuol adacquare inducesi una spezie d'inondazione, alla quale dopo un determinato tempo s'apre l'uscita, deviandosene gli scoli altrove. Questi scoli sono più o meno copiosi, secondo la varia estension di terreno, che ad un tempo s'inaffia. Trattan-

Mantovano paragonata a quella dell' oncia Milanese è in circa come 9 $\frac{12}{100}$ a 1, dunque il Quadretto Mantovano in un giorno adacquerà pertiche Milanesi 397, 91 di prato sabbioso, e pertiche Milanesi 328, 32 di terreno arato. Ma perchè la pertica Milanese, che è braccia quadrate Milanesi 1849, 185185 sta alla biolca Mantovana, che è braccia quadrate Milanesi 8867, 36098, come 1 a 4, 79528 saranno le pertiche Milanesi 397, 91 di prato, e 328, 32 di terreno arato, che adacqua il quadrato in un giorno, eguali a biolche Mantovane 82, 98, e 68, 47 siccome apparirà dividendo i numeri 397, 91, e 328, 32 per 4, 79528.

Il numero delle pertiche di terreno, che si adacquano in un giorno naturale coll' oncia Milanese, viene supposto minore del detto da' Signori Periti Milanesi, asserendosi da essi, che con una quantità d'acqua equivalente ad once sei Milanesi s'irrigano in un giorno circa pertiche 200 di prato; nel qual caso con una sola oncia non si adacquarebbero in un giorno, che pertiche 33 $\frac{2}{3}$, anzi minore quantità ancora, perchè il maggior corpo d'acqua deve avere dell' avvantaggio sopra il mi-

---

tandosi nelle predette sperienze di poche pertiche non si andrà lontan dal vero dicendo, che lo scolo uguagliava la metà di quell' acqua, che sul terreno s'indusse. Con questo scolo adunque sariasi potuto metter sott' acqua un' altra metà di terreno. Ma per la stessa ragione, che nel primo adacquamento la metà d'acqua avanza per lo scolo, nel secondo adacquamento ne avanzerà la metà della metà; e così col medesimo ordine, fino in infinito. Se adunque chiamerassi 1 l'ampiezza di terreno, che si mette sott' acqua nel primo inaffiamento, la totalità di terreno, che si adacquerebbe, tenendo conto di tutti gli scoli successivi, si dovrà esprimere per la seguente serie geometrica $1 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8}$ ec. in infinito, la cui somma è $= 2$; il che ci fa vedere, che tenendo esatto conto degli scoli la totalità del terreno adacquato riesce il doppio di quel che si può metter sott' acqua nel primo inaffiamanto. Sebbene poi nella pratica l'inaffiamento non si faccia secondo l'ordin della serie geometrica, mescolandosi gli scoli (quando si trovano a molta scarsezza ridotti) con altre acque; ciò nondimeno in ultimo risultato l'adacquamento procede come se si tenesse l'ordin prefato.

Se noi supporremo, che i terreni s'adacquino di quattro in quattro giorni, un' oncia d'acqua servirà per render adacquabili pertiche di prato 349, 04, e di terreno aratorio pertiche 288.

nore per la sua maggior forza in ordine all' adacquare: Molto però può influire per adacquare colla stessa acqua più, o meno di terreno il modo col quale questa si usa. Ne' due esperimenti superiormente detti si è procurato di fare le chiuse, che sogliono farsi contro la bocca affine di mandar l'acqua sul terreno nel luogo più discosto da quella per meno rigurgitarla: siccome pure si è procurato di estrarre l'acqua dal canale della invasazione in tutti que' luoghi da dove essa poteva uscire, e trasportarsi sul terreno, e ciò affine d'acquistar luogo nel canale per abilitar la bocca a tramandare maggior acqua restando più libera dal rigurgito. Quindi può essere, che per tali diligenze usate, che non sogliono forse aver quelli, che adacquano, si sia coll' oncia potuto adacquare maggior quantità di terreno di quella, che da' Signori Periti viene supposta.

Per ciò, che riguarda l'adacquamento de' risi, si è superiormente toccato, chè assai variamente da diversi questi s'adacquano; imperocchè alcuni dopo avere riempita la risara d'acqua fino ad un' altezza data, che può essere d'un' oncia fino a cinque, secondo che i risi sono o meno, o più avanzati, di continuo gli danno nuova acqua, la quantità della quale viene supposta da' Signori Periti Milanesi dover essere di mezz' oncia Milanese per duecento pertiche di risara, quando il terreno non è sabbioso, ed altri, dopo aver data l'acqua a' risi all'altezza medesima, altra non ne usano, che passati sei, o otto giorni.

Per determinare dunque coll' osservazione una regola stabile circa la quantità d'acqua da usarsi per mantenere una risara, sembrerebbe, che potesse essere un ottimo mezzo, se si sceglliesse una data porzione di risara, la quale per qualche anno si regolasse in modo, che fosse costantemente adacquata con una data quantità

tità d'acqua, ma abbondante, tenendo conto dell' altezza dell' acqua, che su d'essa vi si conserva, siccome pure del frutto, che in tal tempo rende; e di poi per altrettanto tempo s'adacquasse con una data quantità d'acqua minore, e che potesse essere la pura necessaria, tenendo parimente conto, e dell' altezza d'acqua sopra d'essa conservata, e della rendita: Imperocchè se risultasse, che stando la stessa temperie di tempo, e la stessa qualità, e perfezione del terreno, senza deterioramento di questo, nel decorso della prova le rendite fossero eguali, e venendo la risara adacquata colla maggiore quantità d' acqua, e sotto maggiore altezza, e con la quantità d' acqua minore, e in minore altezza, si potrebbe determinare la quantità, e l'altezza minore usata nel fatto esperimento per quella necessaria al mantenimento d' una risara.

Ma siccome maggiore quantità d'acqua vi vorrà per mantenere la stessa altezza d'acqua determinata per l'osservazione fatta su d' una risara piantata in un terreno, che ne assorbisca maggior copia di quella, che vi vorrà per conservarla su d'una risara posta in un terreno, che meno ne beva, per adattare a ciascun terreno la quantità d' acqua necessaria a dare la stessa altezza d'acqua su la risara si potrebbe fare quest' altro esperimento. Si potrebbero sciegliere tre pezzi di terreno di diversa qualità, cioè uno arenoso, l'altro di terra buona, e l'altro paludoso, i quali fossero di misura eguale, egualmente spianati, e disposti, e che con eguale facilità si potessero adacquare coll' istessa quantità d' acqua conosciuta, oppure con tre quantità d' acqua di diversi canali ma eguali, e conosciute. Si potrebbe d'indi ciascuno di questi pezzi di terreno adacquare colla data quantità d' acqua tenendo diligentemente conto del tempo, che comsumasi dal principio dell' irrigazione di ciascuno

fino al termine; il quale sarà, quando l'acqua si sarà alzata su ciascun terreno all'altezza già determinata: imperocchè dalla diversità del tempo consumato nell'ottenere lo stesso effetto colla stessa quantità d'acqua, secondo tutte le circostanze stesse applicata, eccettuata quella della qualità del terreno, può dedursi la diversa quantità d'acqua, che richiedesi per adacquare i terreni di diversa natura; la quale quantità d'acqua dovrà appunto essere in questo caso, in cui l'acqua, che usasi per irrigare, si suppone eguale, il terreno che adacquasi di misura eguale in ragione de' tempi consumati nell'adacquamento di ciascun pezzo.

E per rendere ogni cosa, che si è detta, più intelligible con un' esempio, si supponga, che l'altezza d'acqua necessaria a mantenersi su d'una risara, acciocchè renda un proporzionato frutto, siasi trovata per l'osservazione fatta d'alcuni anni d'once tre. Sieno ora scielti tre pezzi di terreno arati, e destinati a riso, uno arenoso, l'altro di terra buona, e l'altro paludoso, ciascuno de' quali sia una biolca Mantovana, ossia quattro pertiche, e tre quarti Milanesi in circa, e su la superficie di questi terreni debbasi mandare la quantità d'acqua, che dà un' oncia Milanese, o la nona parte in circa del Quadretto Mantovano per tanto tempo, quanto basta, perchè l'acqua s'innalzi su la superficie di ciascuno all'altezza d'once tre. Si tenti l'esperimento su le tre qualità di terreno, e ottengasi lo stesso effetto dell'altezza d'acqua di once tre sulla superficie del pezzo di terra arenosa dopo ore quattro, su quella del pezzo di terra buona dopo ore tre, su quella del pezzo paludoso dopo due ore. Egli è manifesto, che le quantità d'acqua scaricate dalla stessa bocca, o da bocche eguali su terreni di misura eguale sono come i tempi; dunque l'acqua per ottenere l'effetto sul terreno arenoso

è stata come quattro, sul terreno di terra buona come tre, e sul paludoso come due. Quindi è egualmente chiaro, che volendosi la stessa altezza d'acqua su ciascun terreno nello stesso tempo non ostante i diversi assorbimenti, è necessario che s'accrescano le acque, come i tempi, di maniera tale, che se l'acqua, che adacqua il terreno paludoso in due ore è un' oncia, sia un' oncia e mezza quella che adacqua il terreno eguale di terra buona nello stesso tempo, e due once quella, che adacqua l'eguale porzione della terra arenosa nel medesimo tempo di ore due.

Fondando i calcoli sú le esperienze proposte, ed altre consimili si potrebbe con molta precisione determinare la quantità d'acqua, che può bastare ad adacquare una data quantità di terreno, avuto riguardo ancora alla diversa qualità, e alla diversa coltura di quello. Ma siccome manchiamo noi per ora d'un tal sussidio, ci accontentiamo di dar fine a quest' operetta con produrre un calcolo lasciatoci dal celebre Matematico Signor Giovanni Ceva in un suo manuscritto ordinato al regolamento delle acque del Mantovano, il quale è stato la maggior spinta per comporre questo picciolo Trattato, ed è stato quello, che ci ha prodotto il comando, a cui si doveva da noi ubbidire di scrivere su questa così intralciata, e dubbiosa materia, alla quale, se altrimenti fosse stato, non si sarebbe mai posto mano. Ci facciamo dunque a cercare in quanto tempo la quantità d'acqua, che tramanda il Quadretto Mantovano considerato colle due once di battente, seguitando questo a trasmetterla, senza che venga rigurgitato, adacquerà cento biolche Mantovane di risara, sicchè sopra tutta la superficie delle dette biolche l'acqua rimanga alta cinque once Mantovane.

Supponiamo per far questo calcolo, siccome lo

stesso Sig. Ceva suppone nel medesimo, che la risara di cento biolche sia già imbevuta d'acqua, che sia perfettamente piana, e che non vi sieno altre sorgenti d'acqua, di modo che non vi sieno cagioni, le quali o ritardino, o accelerino, o aumentino, o sovverchiamente diminuiscano l'acqua, che si tramanda dal Quadretto Mantovano.

Si è avvisato nell'annotazione del Capo XI, che un vaso cubico di un braccio Mantovano contiene in circa libbre Mantovane 320, 3036 d'acqua usuale di pozzo: e che la luce del quadretto Mantovano estrae in un' ora 12773, 1727 quadretti d'acqua. Ciascun quadretto cubico è eguale ad once 1728 cubiche, quindi moltiplicando i quadretti 12773, 1727 per 1728. Sarà la quantità d'acqua che scorre dalla luce Mantovana nel tempo di un' ora once cubiche 22072042, 4256.

Questa quantità d'acqua 22072042, 4256 può considerarsi come un solido paralellepipedo il quale abbia la sua altezza d'once 5; perchè giusta l'ipotesi tale deve essere l'altezza dell'acqua su la risara. Ma dividendo le dette once cubiche per l'altezza 5 risultano per il quoziente once quadrate 4414408, 48512. Dunque tante sono le once quadrate, che formano la base del detto paralellepipedo. Ma il braccio quadrato è cento quaranta quattro once quadrate, dunque dividendo il sopradetto numero di once quadrate 4414408, 48512 per 144 la base del paralellepipedo, è braccia quadrate 30655, 6148.

La biolca Mantovana quadrata ha 20 pertiche di lato, e ciascuna pertica è della lunghezza di sei braccia, dunque il suo lato è lungo 120 braccia, e la biolca Mantovana eguaglia il quadrato di 120, cioè è eguale a 14400, e cento biolche a braccia quadrate 1440000. Ma deve essere come la superficie bagnata dal quadretto in un' ora alla superficie eguale a cento biolche, così

il tempo in cui si è bagnata la prima al tempo in cui deve bagnarsi la seconda, dunque sarà come 30655, 61448 a 1440000, così 1 al quarto numero. Per la qual cosa dividendo il secondo numero per il primo avrassi di quoziente 46, 97345 il qual numero eguaglierà ore quarantasei, e minuti circa 58: e tale sarà il tempo che ricercherassi per adacquare le cento biolche, rimanendo sopra di queste l'acqua nell' altezza di once cinque col quadretto Mantovano, il quale per tutto questo tempo costantemente somministri la stessa quantità d' acqua.

Siccome l' oncia Milanese sta al quadretto Mantovano nella proporzione di 1 a 9, 12179, e le biolche cento Mantovane sono pertiche Milanesi 479, 52801, egli è manifesto, che dividendo le pertiche 479, 52801 per 9, 12179, risulterebbe che in ore 46, 97345, ossia in ore 46, e minuti 58 coll' oncia Milanese s' adacquerebbero pertiche Milanesi 52, 56950. L' altezza però sulla superficie di queste sarebbe solamente di once Milanesi 3, 9236 le quali equivalgono alle once 5 Mantovane.

Che se si vuole il numero di pertiche Milanesi, che si adacquerebbe dall' oncia Milanese in ore 46, e minuti 58, supponendo che l' altezza d' acqua sulla sua superficie debba essere di once 5. Si cerchi nella seguente maniera.

La quantità d' acqua che derivasi dalla luce Milanese di un' oncia in un' ora, come si è detto nella nota del Capo XI., è quadretti cubici 682, 00683, moltiplicando questi per once cubiche 1728 eguaglieranno once cubiche 1178507, 80224. Considerando le dette once cubiche disposte in un paralellepipedo dell' altezza d' once 5, e dividendole per quest' altezza risulteranno per la base del sodo once quadrate 235701, 56045, le quali divise per 144 once quadrate eguaglieranno braccia quadrate 1636, 81639: e tanto sarà il terreno bagnato in

un' ora dalla luce dell' oncia Milanese. Ma deve essere come il tempo di un' ora al tempo d'ore 46.58, così il terreno bagnato nel primo tempo al terreno bagnato nel secondo, dunque sarà questo braccia quadrate 76886, 91285: la pertica di terreno Milanese è braccia quadrate 1849, 18518, dunque dividendo le braccia 76886, 91285 per 1849, 18518, il terreno bagnato nelle ore 46, 97345, ossia 46.58 sarà pertiche 41, 57880.

Ricercherà forse taluno, a che serva il calcolo fatto del tempo, che vi vuole per adacquare col quadretto Mantovano cento biolche, sicchè sulla superficie di questa rimanga l'acqua all' altezza d'once cinque Mantovane. La richiesta è ragionevole, e merita avanti di por fine all' opera, che le si risponda. La risposta è dunque che non può calcolarsi l'effetto totale d'una quantità d'acqua in ordine all' adacquamento d'una maggiore, o minore superficie di terreno, se non si determina il tempo, in cui essa dura a scorrere, e l'altezza a cui deve sollevarsi sulla superficie, se trattasi di dar acque ad uso di risare.

E per rischiarare la cosa con degli esempj, supponiamo, che uno cerchi da un Perito, che gli determini l'acqua del quadretto Mantovano per adacquare cento biolche, di modo che l'acqua resti sulla risara alta cinque once. Egli è certo, che il Perito non accorderà a questo l'uso continuo del quadretto in tutta la settimana, ma solamente per de' giorni della settimana, cioè per ore 46, 97345, ossia per ore 46, e minuti 58, perchè in questo tempo potrà avere l'effetto ricercato, e nel restante della settimana potrà esser libera l'acqua del quadretto per altri adacquamenti, se si eccettua quella porzione di questo, che può esser necessaria per conservare l'acqua sulla risara alla data altezza di cinque once.

Così se un altro cercherà l'uso continuo del quadretto per adacquare cento biolche di risara nell' altezza

d'once cinque, ciò non gli verrà accordato dal Perito, perchè un tale intento potrà avere in ore 46, 97345, e l'acqua del quadretto potrà estendere lo stesso effetto in tutta la settimana sino a biolche 357, 64884 se si prescinde da quella porzione, che consumasi nel mantenere l'altezza data d'acqua sulla risara; siccome appare, se si farà la proporzione come 46, 97345 a 168 ore, che sono quelle che costituiscono la settimana, così biolche 100 a 357, 64884.

Egli è dunque manifesto, che deve tenersi conto del tempo, in cui succede un adacquamento per potere calcolare il totale effetto, che può conseguirsi con una data quantità d'acqua. (*a*)

CAPO XIII.

Delle bocche triangolari e circolari. (*b*)

Sia CA (Fig. 16) una bocca rettangolare, ove il lato superiore DC sia a fior d'acqua: dividasi questa bocca primo in due triangoli eguali colla diangonale DB; poi in due rettangoli eguali per mezzo della retta EF parallela a DA, le quantità d'acqua scaricate dalle tre luci eguali, triangolo ADB, rettangolo AC, triangolo BCD son nella ragione $3 : 2\frac{1}{2} : 2 :: 6 : 5 : 4$ (*c*).

(*a*) La nota corrispondente per essere più estesa delle altre, si riporta alla fine dell'opera.

(*b*) N. E. Questi due ultimi capitoli non si trovan nella prima edizione; e formau parte di quelle aggiunte, che l'Autore ideate avea di fare all'opera sua.

(*c*) N. E. Essendo coi soli principj geometrici dimostrata (come vedrassi nel seguito di questo capitolo) la proporzion che passa tra l'acqua scaricata dal triangolo ADB rettangolo, e da un semicerchio il cui diametro sia AB, il N. A. tutto geometra, com'era, s'era proposto di trovare una dimostrazion geometrica, o sulla proporzion che passa tra l'acqua scaricata da una luce rettangolare, ed una triangolare, ovveramente tra l'acqua scaricata da una luce rettangolare, ed una circolare, perchè, trovata di queste due

PROBLEMA I.

Determinare la quantità d'acqua tramandata da qualunque triangolo, che abbia la punta nella superficie, e la base a questa parallela, oppure che abbia in superficie un lato, e la punta in giù, usando la Tavola Parabolica.

RISOLUZIONE

Sia il triangolo ABC (Fig. 17.) colla punta B in superficie, e sia l'altezza del triangolo BD eguale a 4, ed eguale all' altezza dell' acqua sovrastante alla sua base AC, la quale si ponga eguale a 6. È manifesto, che fatto il rettangolo AF co' due lati AC, BD, questo è doppio del triangolo ABC d'eguale base, ed eguale altezza, siccome i due rettangoli DF, DE sono doppj de' due triangoli DBC, DBA = ABC: quindi prese DG, DO eguali alle metà delle DC, DA, e condotte le rette HG, IO paralelle alla BD, sarà il rettangolo GI = ABC.

Si cerchi nella Tavola Parabolica la parabola dell' altezza $4 = \frac{2}{3}.8 = \frac{16}{3} = s + \frac{1}{3}$, si moltiplichi per $OG = AC = 3$, sarà la quantità d' acqua del rettangolo $GI = \frac{2}{2}$ $ABC = 16$.

Ma per le premesse la quantità d'acqua del rettangolo GI sta a quella del triangolo ABC come 5 : 6, dunque fatto 5 : 6 = 16 : 19, 2 la quantità d' acqua tramandata dal triangolo ABC eguaglia 19, 2.

Sia

---

due proporzioni o l'una o l'altra, rimanean nello stesso tempo dimostrate ambedue. Egli con una catena di dimostrazioni fondate sulla Geometria degli indivisibili determinata avea la seconda. Tutta questa serie di dimostrazioni è stata dall' Autore stesso comunicata a chi scrive la presente nota; ma con tutte le diligenze che si son fatte ne' mm. ss. dell' Autore, non s'è potuta mai rinvenire; onde par verosimile che egli non molto prima dell'ultima sua malattia l'abbia comunicata a qualch' altro, il quale poi, saputa la di lui morte, non siasi fatto carico di rimetterla a chi, secondo ogni diritto, ne diventava il legittimo possessore. In mancanza di dimostrazion geometrica se ne vegga una non men sicura tolta dall' analisi nel suppl. 1. num. 38, 39, 40.

Sia ora l'altezza BD del triangolo ABC colla punin giù eguale 6, AC = 8.

Altezza = 6 Parabola = 9,79796
Larghezza = OG = AC = 4

Quantità d'acqua del rett. GI = 39,19184

Ma la quantità d'acqua del rettangolo GI stà a quella del triangolo ABC, come 5 : 4; dunque la quantità d'acqua di questo è 31, 35347.

TEOREMA I.

Da un foro circolare della circonferenza del quale è tangente la superficie dell'acqua scorre tant'acqua, quanta n'esce da un triangolo, che abbia l'altezza eguale al diametro del circolo stesso, e la base orizzontale doppia del diametro medesimo, e situata nella superficie dell'acqua.

DIMOSTRAZIONE

Sia AEHF (Fig. 18) un semicircolo, e sia AF = AM = MI = FI, si prendano nel diametro AF le parti eguali AB = FG, e le parti infinitamente picciole eguali B*b*, G*g*, e si conducano le paralelle EBCD, *ebdc*, HGON, *hgon*. È manifesto per i triangoli simili AFI, ABC, CDI essere AB = BC = FG, e CD = DI, siccome AF = FI, ed è egualmente manifesto essere DI eguale alla paralella BF = AG; dunque è CD : GH = AG : GH : ma per proprietà del circolo AG GH = GH : GF = AB, dunque CD : GH = GH : AB; ma GH : AB = $\surd$AG : $\surd$AB, dunque CD : GH = $\surd$AG : $\surd$AB : ma la velocità con cui esce l'acqua per lo spazietto del circolo GH*hg* è eguale $\surd$AG, e quella con cui esce l'acqua per lo spiazietto CD*dc* del triangolo è eguale $\surd$AB, e gli spazietti egualmente alti GH*hg*, CD*dc* sono come CD a GH. Dunque la sezione CD*dc* sta alla sezione

GH/*hg* reciprocamente come la velocità di questa √AG alla velocità di quella √AB, e ciò verificandosi egualmente in tutti gli spazietti infinitamente piccioli del semicircolo AEHF, e del triangolo AIM, risulta essere eguale la quantità d'acqua che passa per il semicircolo, e per il triangolo. Raddoppiato il triangolo AIM col raddoppiare la base AM prodotta in L l'acqua, che passerà per tutto il triangolo AIL eguaglierà quella dell' intero circolo del diametro AF.

Perchè l'acqua, che passa per il quadrato AFIM, è a quella, che trasmette il triangolo AIM come 5 : 2, e l'acqua che scorre per il doppio triangolo AIL è doppia, sarà la quantità d'acqua trasmessa da questo a quella del quadretto suddetto come 4 a 5, ma per il § prec. l'acqua tramandata dal triangolo AIL è eguale a quella somministrata dal circolo, di cui il diametro AF sia eguale al lato del quadrato AF, il quale quadrato è eguale a quello, che può circoscriversi al circolo, dunque la quantità d'acqua derivata dal foro quadrato circoscritto è a quella proveniente dal foro circolare inscritto come 5 a 4.

L'area del quadrato circoscritto è all' area del circolo inscritto assai prossimamente come 5 a 4; imperocchè, seguendosi la proporzione d'Archimede del diametro del circolo alla circonferenza come 7 a 22, l'area del quadrato circoscritto è all' area del circolo inscritto come 14 a 11, e facendosi la proporzione 14 : 11 = 5 : 3 $\frac{13}{14}$ questo numero riesce minore d'una cinquantesima sesta parte del numero 4: e usandosi la proporzione più esatta in piccioli numeri del diametro alla circonferenza di 113 a 355 assegnata da Adriano Mezio, il quadrato circoscritto sta al circolo inscritto come 452 : 355 = 5 : 3 $\frac{419}{452}$, il quale numero è minore del numero 4 d' un

poco meno di una sua parte 55, cioè è $\frac{1}{54\frac{38}{33}}$ ossia $\frac{33}{1803}$.

Nonostante la detta approssimazione dell' area del quadrato circoscritto all' area del circolo inscritto, nel calcolare la quantità d'acqua, ch' esce da questo, si dovrà seguire la proporzione di 5 a 4 per calcolarla con esattezza, e non negligentare $\frac{1}{56}$ della quantità totale dell' acqua seguendo la proporzione dell' area del quadrato a quella del circolo d'Archimede, e quasi $\frac{1}{55}$ seguendo l' altra d'Adriano Mezio.

PROBLEMA I.

Calcolare la quantità d' acqua, che esce da un foro circolare, della di cui circonferenza è tangente la superficie dell' acqua.

RISOLUZIONE

Sia il diametro AF del foro circolare $= 9$; e sia MF il quadrato che a questo può circoscriversi coi due lati AF, AM orizzontale, e il primo di quelli sia nella superficie dell' acqua. Coll' uso della Tavola Parabolica si calcoli l' acqua, che esce dal quadrato circoscritto, che si troverà eguale 162. Si faccia in seguito la proporzione 5 a 4 come 162 ad un quarto numero, che sarà $= 129\frac{3}{5}$: e sarà l' acqua, che esce dal foro circolare.

TEOREMA II.

La quantità d'acqua scaricata da un rettangolo eguale all' area d'un circolo, il quale abbia i lati verticali eguali al diametro del circolo stesso, e uno degli orizzontali nella superficie dell' acqua, è alla quantità dell' acqua scaricata dal circolo tangente la medesima superficie dell' acqua, nella proporzione di 55 a 56, ovvero di 1775 a 1808.

DIMOSTRAZIONE

Dicasi la quantità d'acqua scaricata dal quadrato circoscritto al circolo $= P$, e quella del rettangolo $= q$, e quella del circolo $= Q$; e sia la circonferenza del circolo $= p$, e il suo diametro $= d$. Poichè l'altezza tanto del rettangolo, quanto del quadrato è la stessa, la quantità d'acqua scaricata dal rettangolo è a quella del quadrato come la larghezza del primo a quella del secondo: ma perchè l'area del rettangolo è eguale all'area del circolo, chiamato x il lato orizzontale del rettangolo, avremo $dx = \frac{pd}{4}$; onde $x = \frac{p}{4}$. Dunque $q : P = \frac{p}{4} : d$: ma

$$P : Q = 5 : 4$$

dunque $q : Q = \frac{sp}{4} : 4d = sp : 16\ d$

ma secondo Arch. $p : d = 22 : 7$
e secondo Mezio $p : d = 355 : 113$
dunque $q : Q = 5.22 : 16.7 = 110 : 112 = 55 : 56$
$q : Q = 5.355 : 16.113 = 1775 : 1808$

ciò, che era da dimostrarsi.

Essendo l'area del rettangolo eguale all'area del circolo le quantità d'acqua scaricate nello stesso tempo da queste luci, debbono essere come le velocità medie: ma le quantità d'acqua sono come 55 a 56, ovvero 1775 a 1808. Dunque anche le velocità medie sono come i detti numeri.

Le distanze de' luoghi delle velocità medie dalla superficie dell'acqua sono come i quadrati delle velocità medie; ma i quadrati delle velocità medie sono nella stessa proporzione de' quadrati de' numeri 55 e 56, oppure 1775 e 1808; dunque saranno come questi quadrati ancora le dette distanze.

La larghezza del rettangolo eguale al circolo sta e quattro quinti del diametro del circolo, come 55 a 56

secondo la proporzione d'Archimede della circenferenza al diametro come 22 a 7, e secondo quella di Mezio 355 a 113 la larghezza medesima sta a quattro quinti del diametro del circolo come 1775 a 1808, imperocchè la larghezza del rettangolo è eguale $\frac{p}{4}$. dunque questa è a quattro quinti del diametro del circolo come $\frac{p}{4}$ a $\frac{4\,d}{5}$, e sostituendo in luogo di p, 22; e di d, 7; si avrà $\frac{p}{4} : \frac{4\,d}{5} = \frac{22}{4} : \frac{28}{5} = \frac{11}{2} : \frac{28}{5} = 55 : 56$. E sostituendo, in luogo di p, 355, e di d, 113, si avrà $\frac{p}{4} : \frac{4\,d}{5} = \frac{355}{4} : 452 = 1775 : 1808$. (*a*)

CAPO XIV.

Su gli accrescimenti o scemamenti d'acqua straordinarj.

TEOREMA I.

Se alla luce NILM, (Fig. 19) che ha l'altezza AB d'acqua su la sua soglia, per la sopravvegnenza di nuova acqua s'accresce essa fino all' altezza BG, dove giunta torna a decrescere fino al primiero sito A, tanto gli aumenti, quanto gli scemamenti dell' acqua tramandata dalla luce in eguali tempi minimi, sono nella proporzione delle differenze delle rispettive velocità medie dalla velocità media primiera avanti dell' aumento, e scemamento.

(*a*) N. E. Quello che in questo Capo si è detto sulle bocche triangolari e circolari, è detto nella supposizione, che le bocche siano senza battente. Per calcolare le quantità d'acqua tramandate dalle bocche triangolari, e circolari fornite di battente, veggasi il Supplemento I. dal num. 36 fino al 48 inclusivamente.

DIMOSTRAZIONE

Perchè la luce NILM è sempre la stessa, e della stessa grandezza è manifesto, che le quantità d' acqua da essa tramandate in eguali tempi, e sotto l' altezza primiera AB, e sotto l'altezze aumentate BC, BD sono come le velocità medie corrispondenti alle rispettive altezze. Dicansi per chiarezza della dimostrazione le quantità d'acqua sotto l'altezza AB $= q$, e l'altre sotto l'altezze BC, BD, BE $= q'\ q''\ q'''$ ec., siccome pure dicansi le corrispondenti velocità medie la prima $= u$, e l'altre $= u'\ u''\ u'''$ ec. È dunque

	$q' : q = u' : u$
e dividendo	$q' - q : q = u' - u : u$
ma è	$q'' : q = u'' : u$
e dividendo	$q'' - q : q = u'' - u : u$
e convertendo	$q : q'' - q = u : u'' - u$
dunque ord.te	$q' - q : q'' - q = u' - u : u'' - u$
similmente	$q''' : q = u''' : u$
	$q''' - q : q = u''' - u : u$
	$q : q''' - q = u : u''' - u$
dunque	$q'' - q : q''' - q = u'' - u : u''' - u$

È abbastanza manifesto, che le quantità $q' - q$, $q'' - q$, $q''' - q$ dinotano tutti gli aumenti dell' acqua sopra la quantità minima primiera, siccome tutte le quantità $u' - u$, $u'' - u$, $u''' - u$ indicano tutte le differenze tra le velocità medie maggiori corrispondenti l' altezze, e la minima altezza AB; dunque gli aumenti detti, sono come le dette differenze. Ma lo scemamento dell' acqua alla luce succede nella stessissima maniera dell' aumento, come è chiaro; dunque anche gli scemanenti sono nelle proporzione delle differenze delle velocità medie maggiori della minima.

Essendo per la dimostrazione fatta superiormente

$$q' - q : q = u' - u : u$$
$$q : q''' - q = u : u''' - u$$

Sarà ordinatamente $q' - q : q''' - q = u' - u : u''' - u$

Se le differenze delle velocità medie dalla velocità media primiera saranno proporzionali ai tempi in cui se ne fa o l'accrescimento o lo scemamento, ciascuna delle velocità medie non si manterrà, che per un tempuscolo infinitamente piccolo ed eguale. Dunque se le differenze delle velocità medie dalla velocità primiera saranno proporzionali ai tempi, saranno anche gli aumenti, o scemamenti delle quantità d'acqua proporzionali alle predette differenze delle velocità medie (*a*), e proporzionali parimenti ai tempi in cui queste differenze si ottengono.

TEOREMA II.

Se ad una luce sopravverrà della nuova acqua, per la quale cresca in ragion de' tempi la sua velocità me-

---

(*a*) N. E. per conoscere quando le differenze delle velocità medie sono proporzionali ai tempi sia NL (Fig. 19) una bocca rettangolare il cui battente ordinario sia AC; la sua quantità relativa d'acqua sarà $\frac{2}{3} \cdot ML\left(\overline{CB^2}^3 - \overline{AC^2}^3\right)$; e la velocità media sarà $\frac{2}{3} \cdot \frac{\left(\overline{CB^2}^3 - \overline{AC^2}^3\right)}{MN}$. Che noi chiameremo V. Cresca ora il battente da C in D; da D in C ec.; le velocità medie saranno $\frac{2}{3}\frac{\left(\overline{DB^2}^3 - \overline{DA^2}^3\right)}{MN}$; $\frac{2}{3}\frac{\left(\overline{EB^2}^3 - \overline{AE^2}^3\right)}{MN}$ che noi chiameremo V', V''. Chiamando per tanto t, t' il tempo in cui l'acqua si solleva da C in D, da D in E, avremo (nell'ipotesi che le predette differenze delle velocità medie siano proporzionali ai tempi) $V' - V : V'' - V :: t : t'$; quindi $V'' = t' \frac{(V' - V)}{t} + V$; se dunque tenuto conto de' tempi in cui si fanno gli alzamenti, e calcolate le velocità V, V', V'', troverem verificarsi quest'ultima equazione conchiuderemo, che le predette differenze delle velocità medie sono proporzionali ai tempi.

dia fino ad un determinato punto, dopo il quale vada diminuendosi nella stessa ragione, e finalmente si restituisca all' altezza prima, sarà la somma tanto degli aumenti, quanto de' scemamenti d' acqua de' quali avrà avvantaggiato rappresentata da un triangolo rettangolo, che abbia per base una retta, la quale sia la differenza tra la quantità d'acqua scaricata dalla luce sotto la primiera altezza, e quella scaricata sotto la massima altezza accresciuta, e che abbia per altezza un' altra retta, che dinoti il tempo, o dell' accrescimento, o del scemamento.

DIMOSTRAZIONE

Si dicano gli accrescimenti d'acqua, come nel teorema precedente, $q'-q$, $q''-q$, $q'''-q$ q^{IV} ec. Rappresenti ora la retta AB (Fig. 20) il tempo in cui s' è fatto il totale accrescimento; e le rette AE, AO i tempi intermedj; s' applichi nel punto B l'ordinata BC perpendicolare ad AB, ed a BC si facciano paralelle le EH OG ec. Denoti la retta BC la differenza tra la quantità d'acqua derivante dalla luce sotto l'altezza d'acqua accresciuta, e sotto l' altezza d' acqua avanti l'alzamento; e l' altre paralelle EH, OG ec. dinotino le differenze delle quantità d'acqua derivanti dalla luce sotto l' altezze minori della massima, e maggiori della minima, e tra queste intermedie. Ciò posto: poichè per il teorema precedente è $q'-q : q''-q = u'-u : u''-u$, ed è $q'-q : q'''-q = u'-u : u'''-u$, sarà ancora AO : AE = OG : EH, ed AE : AB = EH : BC; e similmente AO : AB = OG : BC; saranno dunque l'ascisse AO AE AB nella proporzione delle corrispondenti ordinate OG EH BC: ma quando l'ascisse sono come l'ordinate, la linea che passa per tutte l' estremità G, H, G di queste, e di quant' altre ordinate, che possono applicarsi all' asse AB è una retta, che coll' asse stesso concorre in A; siccome

me è manifesto delle proprietà del triangolo, dunque la somma degli aumenti d'acqua, che succedono ad una luce nell' alzarsi dell' acqua, è rappresentata dal triangolo rettangolo ABC dell' assegnata base, e altezza. E perchè lo scemamento accade nella stessa maniera dell' accrescimento, ma con ordine inverso, ancora la somma de' scemamenti è denotata dall' altro triangolo BAD eguale al precedente. Sarà dunque la somma unita dell' alzamento, e scemamento rappresentata dalli due triangoli ABC ABD, ovvero dal solo triangolo CAD, o che è lo stesso dal rettangolo AB in BC.

PROBLEMA I.

Data la luce NILM (Fig. 19) e la quantità d'acqua da essa derivante sotto l'altezza sua d'acqua ordinaria AB; e data similmente la quantità d'acqua dalla medesima scaricata sotto la massima altezza BE, a cui è giunta in un tempo dato per sopravvegnenza di nuova acqua, dopo la quale si è di nuovo nello stesso tempo ribassata fino in A, si cerca l'aumento d'acqua, di cui ha goduta la luce durante l'alzamento della medesima fino F, e lo scemamento fino in A.

RISOLUZIONE

Dicasi la quantità d'acqua maggiore q', e la minore q; sarà la differenza $q' - q$: dicasi t il tempo o dell'alzamento o dello scemamento, avremo $t\ (q' - q)$ eguale alla quantità d'acqua guadagnata dalla luce durante l'alzamento, o lo scemamento. Si ha la dimostrazione ne' due precedenti teoremi.

Sia per un esempio la luce HILM larga once 3, ed alta once 9, e sia appena sommersa sotto la superficie dell' acqua. Sopravvenga alla luce della nuova acqua nel tempo d'ore 6, ossia di giorni $\frac{1}{4}$, e formi alla

medesima un battente d'once 7, sicchè si riduca l'altezza su la sua soglia ad once 16; di poi nello stesso tempo torni a calare fino alla primiera d'once 9. Sarà secondo la tavola parabolica la quantità d'acqua della luce stante l'altezza d'once 9 once cubiche 54, 00, e sotto l'altezza d'once 16 sarà once 90, 95948, e quindi sarà la differenza eguale ad once cubiche 36, 95948 la qual differenza moltiplicata nel tempo $t = \frac{1}{4}$ da di quoziente 9, 23986. La quantità d'acqua dunque, di cui ha profittato la luce di più della sua ordinaria durante l'aumento, o lo scemamento dell'acqua sopravvenuta, è stata ritrovata d'once cubiche 9, 23986.

PROBLEMA II.

Sia data la grandezza d'una luce, e la quantità d'acqua, che tramanda sotto la sua naturale altezza, e sotto la massima altezza, a cui in un dato tempo giugne per l'acqua sopravvenuta. Sia altresì dato il numero delle volte, che nell'anno succede questa mutazione alla luce. E di più sia convenuto chi riceve la maggior copia d'acqua col Padrone dell'acqua, che uno la compensi all'altro. Si cerca la quantità d'acqua, che il Ricevitore deve in perpetuo compensare a chi la somministra, ovvero il prezzo, che una sol volta il primo deve sborsare al secondo.

RISOLUZIONE

Perchè sono date le quantità d'acqua, che scarica la luce sotto le due diverse altezze, ed è data la grandezza della luce; per il Problema precedente è nota la somma degli aumenti, che succede alla medesima in ciascuna escrescenza. Si moltiplichi questa somma d'aumenti per il numero dato delle volte, che accade nell'anno, e si divida per i giorni 365, che compongo-

no l'anno. Il quoto sarà la quantità d'acqua da compensarsi in perpetuo al padrone della medesima. Che se si farà la proporzione come la quantità d'acqua d'un oncia, solita misura del paese, al detto quoto, così il prezzo d'un' oncia al quarto, sarà questo quarto numero il prezzo da sborsarsi per una sol volta al detto padrone. La dimostrazione è abbastanza nota dalle cose dette, e dalla regola del tre.

Sia la grandezza d'una luce once 30 quadrate, la quantità d'acqua scaricata da essa sotto la sua altezza d'acqua ordinaria once 61.87, cresca l'altezza in modo, che in ore sei sotto l'altezza massima scarichi once 81.67. Sia quaranta due il numero dato delle volte, che succede questo aumento d'acqua alla luce ogni anno. Perchè la differenza delle quantità d'acqua è once cubiche 19.80, la somma degli aumenti in ciascun accrescimento d'acqua alla luce eguaglia once cubiche 4, 95. Dunque quarantadue di questi accrescimenti sono eguali ad once cubiche 207, 9, le quali ripartite ne' 365 giorni dell'anno, danno per ciascun giorno dell'anno, ossia in perpetuo once cubiche 0, 569, che sarebbe la quantità d'acqua da darsi in perpetuo per compensazione al padrone dell'acqua. Facendosi la proporzione come la quantità d'acqua dell'oncia fondamentale, che è once cubiche 23, 73702 : 0, 569 così il prezzo che si vende nel paese l'oncia d'acqua fondamentale ad un quarto, si avrà il prezzo da pagarsi per una sol volta al detto padrone. (*a*)

(*a*) N. E. Supposto, che il valore dell'oncia d'acqua milanese ascende a lire 25000, il prezzo da sborsarsi sarebbe lire 589. soldi 4, denari 5.

Se l'acqua giunta al massimo della velocità media si mantenesse in questo stato per un dato tempo qualunque t', allora al rettangolo che si è ritrovato nella risoluzione del presente problema, si dovrebbe aggiugnere un altro, un lato de' quali fosse BC che rappresenta la quantità d'acqua massima, e l'altro lato fosse $AE = t'$.

SUPPLEMENTO

1. Il nostro Autore non calcola che le quantità d' acqua del Milanese e Mantovano : non sarà discaro al Pubblico d' avere il modo di calcolare anche quelle quantità d' acqua , tanto relative quanto assolute , che si trámandan per pura pressione , (come nel Milanese e Mantovano) da quelle sezioni che si riguardan come fondamentali in diverse altre provincie della nostra Repubblica , e che vengono pure sotto il nome di oncia o di quadretto . Noi pertanto stenderemo il calcolo anche sulle quantità d' acqua del Pavese , Novarese , Cremasco , Lodigiano e Cremonese ; e combinandone poi insieme i risultati con quegli anche del Milanese , e del Mantovano potremo in un colpo d' occhio vederne la reciproca proporzione . Di più avendoci lo stesso Autore lasciati ne' suoi scritti le eccellenti sue dimostrazioni geometriche sull' erogazione delle bocche triangolari e circolari , le quali dimostrazioni si sono pure impresse in questa nuova ristampa , noi a compimento dell' opera ne aggiungeremo anche le dimostrazioni analitiche ; Imperciocchè è cosa , per un Idraulico , oltre ogni pensar gioconda vedere Sintesi e Analisi , come due germane sorelle portarci concordemente ai medesimi risultati . E' poi noto a chiunque esser le formole analitiche , nell' applicazione della teorica alla pratica ; d' un uso senza paragon più facile e più spedito de' raziocinj geometrici .

Dimensioni delle once , o quadretti d' acqua di varie Provincie .

2. Oncia d' acqua milanese dicesi quella quantità d' acqua che per pura pressione passa con flusso continuo per una luce rettangola alta quattro once del braccio di Milano , larga once 3 , e che inoltre ha sovrastante al lembo superior della luce once 2 d' acqua ferma : quest' altezza d' acqua ferma chiamasi *battente* .

3. Oncia d' acqua lodigiana è una luce rettangola

alta once 9

larga « 1

con battente alto « 2

Le dimensioni della luce prendonsi in misura del braccio lodigiano, ma il battente a misura di braccio milanese.

4. I Pavesi e Novaresi servonsi delle stesse dimensioni, che in Milano, con quest' avvertenza però che gli uni e gli altri computano queste dimensioni a misura del proprio braccio.

5. Oncia d' acqua Cremonese è una luce rettangola

alta once 10

larga « 1

con battente alto « 1

Tutto in misura del braccio cremonese.

6. In Crema non si ha per l' oncia una determinazione costante e fissa; comunemente si fa uso delle dimensioni di Cremona, regolate però col braccio Cremasco.

7. Quadretto mantovano è una luce quadrata

coi lati di once 12

e col battente « 2

Avvertasi che, essendo, anche nelle stesse Provincie, diversità di bracci, il braccio stabilito in origine per le once o quadretti d' acqua è dappertutto il braccio architettonico, o come volgarmente tra noi si dice il braccio d' opera.

Formola delle quantità d' acqua assolute, e relative che sgorgano per pressione da qualsivoglia luce rettangola.

8. Partendo dal principio incontrastabile, assunto pure dal N. A. per fondamento de' suoi calcoli, che le velocità d' un' acqua che per pura pressione sgorga liberamente da una luce, sono come le ordinate della parabola in cui le assisse ci rappresentin le altezze corrispondenti che premono, siegue che anche le quantità di acqua le quali son sempre proporzionali alle velocità, rappresentar si possano per le stesse ordinate; Quindi chiamando x l' al-

tezza della luce rettangola, l la sua larghezza; b il battente; p il parametro della parabola, Q la quantità d'acqua che sgorga nel tempo come uno, avremo, secondo quello che il N. A. ha dimostrato nel Cap. V.

$$\frac{2}{3} L \sqrt{p} \left(\overline{x + b}^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}} \right) = Q$$

9. Questa formola, come ognun vede, ne rappresenta quell'acqua che sgorga da qualsivoglia sezion rettangolare, sia picciola, sia grande, e sotto qualsivoglia battente, potendo noi alle lettere l, x, b, assegnare que' valori che vogliamo; e perciò è applicabile a tutte le once e quadretti d'acqua sopra descritti.

10. Ma assegnando alle lettere l, x, b i valori corrispondenti delle once o quadretti sovradescritti, Q ne rappresenterà le quantità d'acqua relative o le assolute? essa ne potrà rappresentare egualmente le relative, come le assolute; Imperciocchè il rappresentarci le une piuttosto che le altre dipende dalla determinazione del parametro p della parabola. Quando le nostre ricerche sono rivolte alle quantità d'acqua relative noi allora non abbiamo altro in vista che la proporzione tra la quantità d'acqua che scarica una luce alla quantità di acqua che ne scarica un'altra, per esempio se l'una sia doppia, tripla o quadrupla della quantità scaricata da un'altra, la qual proporzione ci può esser cognita, senza che ne sia cognita la quantità precisa che scarica nè l'una nè l'altra; ma quando noi abbiamo in vista la quantità assoluta, allora convien determinar precisamente qual numero d'once cubiche d'acqua determinate su d'un tale e determinato braccio, in un tempo dato da una luce data sgorghino. Ora poichè gli equemoltiplici, sian grandi, sian piccioli, non turban niente l'equazione, è chiaro, che applicando la nostra formola a bocche di varie dimensioni (misurate però collo stesso braccio), la proporzione tra le varie quantità sgorganti non turberassi qualunque parametro per la parabola si assuma, purchè si mantenga lo stesso nelle bocche tutte; e poichè la formola nostra riceve la sua massima semplicità quando il parametro fassi eguale all'unità, quindi

ove si tratta di determinare le sole quantità relative si assume $p = 1$; il che ne' calcoli suoi anche il N. A. suppone .

11. Questo parametro eguale all' unità non ci da le quantità assolute ; qual sia il suo valore per le quantità assolute lo vedrem nel seguito ove queste si avranno a ridurre a calcolo .

12. Nelle misure relative si possono paragonare tra loro le quantità d' acqua tramandate da bocche diverse della provincia stessa , per es. tra una bocca del Cremonese con altre del Cremonese, ovvero tra bocche di provincie diverse per es. tra una bocca cremonese ed una cremasca . Nel primo caso (eccettuatane l' oncia Lodigiana) non si ha bisogno di riduzione alcuna nelle misure , servendosi ciascuno della misura del proprio paese ; non così però succede nel caso secondo ove per avere nell' acqua una giusta proporzione è necessario che le dimensioni si riducano ad una misura comune .

13. A questo fine abbiamo noi descritta la tavola che siegue in cui i bracci delle provincie sovraccennate si sono ragguagliati, riferendoli tutti ad una misura sola ; e perchè questa misura a cui tutti i nostri bracci si riferiscono potesse riuscire di facile intelligenza a tutti , abbiamo trascielto il piede di Parigi, che da qualche secolo in quà , è la misura che comunemente nelle scienze si adopera ; tanto più che nel seguito avremo pur bisogno della proporzione di questo piede di Parigi coi nostri bracci .

Ragguaglio di varie misure col piede di Parigi.

TAVOLA I.

	Piedi	Pollici	Linee	Totale in linee
Piede di Parigi	1.	0	0	144
Braccio Milanese	1.	9	11,73	263,73
Pavese	1.	11	2,35	278.35
Novarese	1.	10	5.	269
Cremasco	1.	5	3,12	207,12
Lodigiano	1.	4	11,32	203,32
Cremonese	1.	5	8,78	212,78
Mantovano	1.	5	2,95	206,95

Delle quantità d'acqua relative.

14. S'è già avvertito (num. 10.) che per avere dalla formola (num. 8.) le quantità relative di acqua tramandata da bocche di dimensioni diverse (misurate però collo stesso braccio) si prende il parametro $p = 1$; onde si ha

$$\frac{2}{3} L. \left(\overline{x + b}^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}} \right) = Q$$

Siccome per l'oncia lodigiana (num. 3) le dimensioni di x sono a misura del braccio di Lodi , e quelle di b a misura di Milano , sarà necessario , per avere le quantità relative dell'oncia d'acqua lodigiana a misura del braccio di Lodi , ridurre , per mezzo della tavola antecedente , b a misura del braccio di Lodi, cioè a dire due once del braccio milanese ad once del lodigiano . Fatto

adunque 203, 32 : 263,73 :: 2 : b noi abbiamo $b = 2, 594$; cioè il battente di Lodi, a misura del suo braccio, alto once 2, 594.

15. Correggendo così l' altezza del battente nell' oncia d'acqua di Lodi noi abbiamo successivamente nella formola del num. antecedente introdotte le dimensioni delle once e quadretti d' acqua descritti ai num. 2; 3; 4; 5; 6; 7. ed abbiamo formata la tavola che siegue:

Quantità relative dell'oncia o quadretto d' acqua di varie Provincie a misura del loro braccio architettonico.

TAVOLA II.

	Provincie	Quantità relative
Oncia d' acqua	Milanese	23, 737
	Pavese	23, 737
	Novarese	23, 737
	Cremasca	23, 655
	Lodigiana	23,516
	Cremonese	23, 655
Quadretto	Mantovano	396, 432

16. Se i Periti delle provincie surriferite introdurranno nella nostra formola del num. 14 le dimensioni di altre bocche le quali tramandin acqua per pura pressione, potran facilmente, paragonando i loro risultati con quelli dell' oncia da noi trovata pel loro paese, determinare il numero delle once d' acqua tramandate dalle bocche da essi calcolate.

17. Ma se si trattasse di paragonare quantità d' acqua che sboccan da sezioni in diverse provincie saria necessario aggiugnervi un' altra operazione che è quella di ridurre le dimensioni di tutte le bocche che si voglion paragonare, ad una comun misura; quindi se si vorrà sapere quante once d' acqua, per es. milanesi, scarica una bocca pavese noi potremo determinare in prima la quantità relativa d' acqua scaricata a misura pavese; poi per ridurle a misura milanese cresceme il loro numero nella ragion quintupla dimediata de' loro bracci. Sia a il numero delle once d' acqua pavesi scaricate dalla bocca pavèse; e dicasi $m : n$ la proporzione tra 'l braccio milanese e 'l pavese, se noi faremo

$$m^{\frac{s}{2}} : n^{\frac{s}{2}} :: a : \frac{an^{\frac{s}{2}}}{m^{\frac{s}{2}}}$$ quest' ultimo termine ne rappresenterà il numero delle once d' acqua milanesi scaricate dalla bocca pavese. Infatti che il numero cercato delle once milanesi debba risultare tanto maggiore quanto è maggiore il numero delle once d' acqua pavesi scaricate dalla bocca pavese è evidente per se stesso. Ma non riesce pure di minor evidenza che il numero delle once milanesi debba crescere nella ragion quintupla dimidiata; Imperciocchè quando nella formola generale il parametro p si fa eguale all' unità, si suppone che, in tutte le once o quadretti d' acqua che si voglion calcolare, la parabola a cui termina la scala delle velocità sia la stessa, come realmente nella pratica la parabola regolatrice del movimento cagionato dalla pressione è sempre la stessa. L' unità adunque che nel calcolo delle quantità relative ci rappresenta il parametro p è unità della stessa spezie qualunque sia la Provincia a cui appartenga l' oncia o quadretto d' acqua che noi calcoliamo. Ma se l' unità del parametro la quale è puramente astratta considerar sempre si dee della stessa spezie non possiamo però, ove si tratti di Provincie diverse riguardare come della stessa spezie quelle unità che nella nostra formola sono rappresentate dalle altre lettere b, l, x; Imperciocchè nelle Provincie diverse, essendo diverso il braccio architettonico, riescono pur diverse anche le sue once, che sono quelle che ci

vengono indicate dalle lettere b, x, l. Da ciò nasce che sebben le quantità relative da noi calcolate nella Tav. 2. per il milanese, pavese, novarese siano eguali, non possiam per questo inferire che la quantità d' acqua scaricata in un dato tempo dall' oncia milanese sia eguale alla scaricata dall' oncia pavese o novarese, perchè le unità rappresentate dal numero 23,737 comune a tutte tre le provincie sono unità di spezie diversa. Le unità per il milanese sono once del braccio milanese; e per il pavese o novarese sono once al loro braccio corrispondenti. Ora supponendosi, per quel che detto abbiamo poco sopra che l'unità astratta di p sia per tutte le provincie la stessa, le unità della Tav, 2. riescono once sollevate alla quinta potenza dimidiata, giacchè le dimensioni della nostra formola, prescindendo dal parametro sono di $\frac{5}{2}$.

18. Fondati noi su questa regola abbiamo descritta la terza tavola che siegue in cui le quantità relative dell' oncia o quadretti d'acqua d'altri paesi sono ridotte a misura del braccio milanese.

Proporzione tra le quantità d' acqua scaricate dall' oncia milanese, e le scaricate dalle once o quadretti d' altre provincie.

TAVOLA III.

	Provincie	Quantità relative
	Milanese	23, 737
	Pavese	27, 164
	Novarese	24, 941
Oncia	Cremasca	12, 929
	Lodigiana	12, 284
	Cremonese	14, 335
Quadretto	Mantovano	216, 26

19.

19. Per mezzo di questa tavola chiunque conosce la quantità di terreno che l'oncia d'acqua d'una delle sette provincie nominate adacqua in un dato tempo, potrà pure colla sola regola d'oro conoscere la quantità di terreno che sarà per irrigare in tempo uguale un dato qualunque numero d'once d'acqua delle altre sei. Parimenti se un possessore, per es. milanese avrà a comprar acqua sul pavese, novarese ec., sapendo il valore dell'oncia d'acqua milanese, saprà regolarsi nel prezzo della compera.

Delle quantità d'acqua assolute.

20. Quando si cerca la quantità assoluta d'acqua tramandata da una sezione, si cerca il vero numero d'once cubiche calcolate su d'un tale e determinato braccio, le quali sgorgano dalla stessa sezione in un tempo dato. Per fare la determinazione di questo numero d'once cubiche si supponga che da un foro quadrato d'un pollice sorta l'acqua con una velocità tale da percorrere piedi 30 in 1". Poichè il flusso è continuo, è chiaro che se l'acqua uscirà dal foro a gola piena, il totale dell'acqua sortita sarà un prisma che avrà per base l'area del foro, e per altezza piedi 30 = poll. 360. epperò la quantità assoluta d'acqua uscita in 1". da questo foro sarà pollici cubici 360.

21. Quando la velocità dell'acqua è di pura pressione è sempre corrispondente alle ordinate di quella parabola le cui assisse si rappresentin dall'altezza premente. Quindi se noi troveremo una parabola, che sotto una qualsivoglia altezza abbia un ordinata la cui lunghezza sia precisamente quello spazio che l'acqua sgorgante percorrerebbe in un dato tempo con quella velocità che sotto la detta altezza porta dalla pressione, la medesima parabola ci rappresenterà colle altre ordinate tutte le quantità assolute di quell'acqua che sgorga sotto qualsivoglia altra altezza diversa. Siccome la diversità delle parabole (intendo appolloniane) dipendono dalla diversità del parametro, converrà, tra l'infinito numero di queste parabole, trovare quell'una che abbia tale parametro che sotto una tale e determinata altezza abbia quell'ordinata che sia

precisamente eguale allo spazio che l'acqua sgorgando sotto la stessa altezza percorrerebbe.

22. Il N. A. fondato sull'esperienza universale avverte che la velocità delle acque che escon per pura pressione è quella stessa che acquisterebbe un grave nel cadere liberamente dall'altezza premente. Ora si sa che un grave in 1" cade per l'altezza di piedi 15. $\frac{1}{12}$; epperò secondo i principj di meccanica acquista una velocità che nel moto equabile percorrer li farebbe nello stesso tempo uno spazio doppio cioè piedi 30 $\frac{1}{6}$. L'acqua adunque che sgorgasse sotto l'altezza premente di piedi 15 $\frac{1}{12}$ = poll. 181 avrebbe una velocità da percorrere in 1" poll. 362; quindi la parabola che ci deve rappresentare le velocità assolute, e perciò anche le quantità assolute, dovrà essere quella in cui ad un' assissa di poll. 181 corrisponde un ordiñata di poll. 362.

23. Quale di questa parabola sarà il parametro? niente di più facile a trovarsi. Essendo nella parabola il quadrato dell'ordinata eguale al parametro moltiplicato nell'assissa avremo l'equazione $p.\ 181 = \overline{362}^2$

$p = 4.\ 181 = 724.$ poll.

Se dunque in luogo di adoperare, come abbiam fatto nelle quantità d'acqua relative il parametro = 1, lo faremo = 724 pollici del piede di Parigi, e sostituiremo questo valore di p nella formola del num. 8. noi avremo la quantità d'acqua assoluta. Ma se il parametro si prende in misura del piede di Parigi converrebbe anche le altre dimensioni di x, e di b. che si prendessero alla stessa misura. Le dimensioni che a noi bisognano sono quelle delle provincie nostre. Converrà dunque farne la riduzione.

24. Eccola appunto nella tavola che siegue la quale ci rappresenta non sol la grandezza del parametro, ma quella ancora delle sue radici; o tutto a misura del braccio di ciascuna provincia particolare.

TAVOLA IV.

Provincie	Parametro	Radice
Milanese	395, 304	19, 8822
Pavese	374, 549	19, 3532
Novarese	387, 568	19, 6867
Cremasca	503, 335	22, 4351
Lodigiana	512, 763	22, 6442
Cremonese	489, 978	22, 1352
Mantovana	503, 66	22, 4423

25. Dalle cose fin quì dette ognun s' accorge, che prescindendo dalla contrazion della vena tutta la diversità ne' risultati delle quantità d' acqua relative, e delle assolute non dipenderà che da questo, che per le quantità relative il parametro della formola nostra (num. 8.) si fa $= 1$, ma per le quantità assolute si deve prendere come nella tavola antecedente. Dunque se le quantità relative descritte nella tavola 3. si moltiplicheranno per le radici dei parametri corrispondenti della tavola precedente, i prodotti ne forniranno le quantità d' acqua assolute nell' ipotesi che le acque sgorgasser dalle bocche a gola piena per il tempo di 1".

26. Ma si sa che la vena all' uscir si contrae, e che sta l' area della bocca all' area della vena contratta :: 8 : 5. Per avere adunque le quantità assolute d' acqua che attualmente sgorgan nel tempo d' un secondo, converrà moltiplicare i detti prodotti per $\frac{5}{8}$. Nella tavola seguente la prima colonna ci da le quantità assolute d' acqua nell' ipotesi di niuna contrazione, la colonna seconda ci da la quantità attuale perchè vi si è introdotta la contrazione:

Quantità assolute dell' oncia, o quadretto d' acqua somministrate in 1" calcolate sul braccio di ciascuna Provincia in particolare.

TAVOLA V.

Provincie	a gola piena	a vena contratta
Milanese	471, 944	294, 965
Pavese	459, 387	287, 117
Cremasca	530, 702	331, 689
Novarese	467, 303	292, 064
Lodigiana	533, 044	333, 152
Cremonese	523, 608	327, 255
Mantovana	8996, 846	5623, 028

27. Le quantità assolute per l' oncia milanese e quadretto mantovano, secondo i calcoli del N. A; riescono in proporzione un po' più forti delle nostre. La ragione è che i calcoli del N. A. sono fondati sull' esperienza del Mariotte fatta in un foro circolare con una linea di battente. Si sa che quando il pelo dell' acqua premente è vicino al lembo superior della bocca, ivi l' acqua s' abbassa e forma una specie d' imbuto, e questa circostanza non fu dal Mariotte avvertita; quindi sebben l' acqua contigua al lembo superior della bocca non avesse che l' altezza d' una linea, doveane però avere di più l' acqua premente che le stava a fianco, e di fronte, epperò l' erogazione esser dovea più copiosa di quel che ricercasse il battente d' una linea sola. Noi abbiamo stimato di posare più sicuri il piede appoggiandoci ne' nostri calcoli, piuttosto che ad una particolare esperienza, a' principj teorici i quali non son che un risultato di tutte le più esatte sperienze che siansi fatte fin quì.

Formola generale per le quantità d'acqua che sgorgano da qualsivoglia sezione.

28. Fin quì non si sono considerate che le sezioni fondamentali appresso noi stabilite per la giusta distribuzion delle acque destinate all'irrigazione. Queste sezioni, perchè avessero il massimo grado di semplicità, furon da nostri Maggiori assunte costantemente di figura rettangolare. Ora sollevandoci ad idee più generali cercheremo la formola che ne determina in generale quell'acqua che passa da qualsivoglia bocca; indi ne farem l'applicazione ad alcune bocche di regolar figura, nella quale applicazione tenendo noi dietro alle orme segnateci dal N. A., non solo determineremo quell'acqua che scaricasi per pura pressione nella sua libera uscita, ma anderemo ancor in traccia di quelle modificazioni che pur troppo frequentemente s'apportano da quelle cagioni straniere che accelerano o ritardan la velocità che dalla pression dipende.

29. Sembrerà forse a taluno che la nostra formola generale si dovesse prima d'ogn'altra cosa svolgere al principio di questo nostro supplemento, potendosi da essa dedurre anche qnella formola particolare di cui ci siamo serviti al num. 8. Ma è da avvertire che la formola generale per le quantità d'acqua che sgorga da qualsivoglia sezione è una formola differenziale, che poi nell'applicazione si deve integrare. Or sebbene tra i nostri Periti si trovi chi pronto e facile ha il maneggio del calcolo differenziale e integrale, trovasi pur anche chi pronto e facile non l'ha. Mentre adunque delle sezioni fondamentali si trattava, ne parve necessario usare una formola che fosse alla portata di tutti; e nel supplemento d'un'opera che è fatta precisamente pel comodo di tutti i periti abbiamo stimata oportuna cosa anteporre il maggior vantaggio alla maggiore semplicità del metodo.

30. Sia pertanto HBL una sezion qualunque sommersa dell'altezza BA (Fig. 1) sotto al livello CD dell'acqua stagnante, e sia la soglia HL, di questa sezione orizzontale, epperò parallela a CD. Prodotta AB in M le si conducano perpendicolari le rette FG, MN; ed a queste le infinitamente prossime fg, mn. Deno-

minando AB $= b$, BE $= x$, FG $= y$, avremo E e, O o $= dx$; FG gf, come pure MN nm, e qualsivoglia altr' area consimile $= y\,dx$. L' altezza E e, O o, di queste aree essendo infinitamente picciole, la velocità dell' acqua che in tutta l' ampiezza di ciascuna di loro sgorga sarà eguale e sarà da esprimersi per $p.\overline{b+x}^{\frac{1}{2}}$; ovvero fatto $p = 1$; si esprimerà per $\overline{b+x}^{\frac{1}{2}}$; e poichè la quantità d' acqua che ciascuna sezion tramanda è il prodotto della velocità nella sezione, chiamando dq l' acqua che sgorga da ciascuna sezion elementare FG gf si avrà $dq = y\,dx\,\overline{b+x}^{\frac{1}{2}}$; e integrando

$$q = S.y\,dx\overline{b+x}^{\frac{1}{2}}$$

che è la formola generale applicabile alla quantità d' acqua che nel tempo come uno sgorga da qualsivoglia sezione.

Sezion lineare e rettangolare.

31. Incominciamone l' applicazione dal caso semplicissimo della sezion lineare. Se tutta l'area HBL si concentra in BM, l'area FG gf, si concentra in E e; onde si ha $y\,dx = dx$; epperò

$$q = S.dx.\overline{b+x}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.\overline{b+x}^{\frac{3}{2}} + c.$$

Per determinare il valore c; notiamo che fatta $x = o$ deve essere $q = o$; onde si avrà $\frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}} + c = 0$ il che ne fornisce $c = -\frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}$ onde in qualsivoglia sezion lineare avremo $q = \frac{2}{3}\left(\overline{b+x}^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right)$ e quando p non si volesse, come abbiam fatto noi, supporre $= 1$ avremo $q = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}\left(\overline{b+x}^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right)$

32. Se la bocca non avesse battente, sarebbe $q = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$; ovvero $q = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}}$ Fermiamoci qualche poco a sviluppare quest' ultima formola

$$q = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}}$$

Sia AM $= x$ l' asse della parabola ACD (Fig. 2.) il cui parametro è p: noi per proprietà della parabola avremo l' ordinata MD $= \overline{px}^{\frac{1}{2}}$; e sopra MD prendendo ME $= \frac{2}{3}$ MD avremo ME $= \frac{2}{3} \overline{px}^{\frac{1}{2}}$; onde il rettangolo AM. ME $= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} = q$; cioè a dire la quantità d' acqua che sgorga da una sezion lineare senza battente si esprime per l' area parabolica ADM.

33. Infatti condotta la retta bc infinitamente prossima e parallela a BC, l' area BCcb sarà l' elemento di tutta l' area parabolica ADM. ora l' area BCcb è $= dx \overline{px}^{\frac{1}{2}}$ dunque ADM $= S. dx \overline{p}^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}}$.

34. Se sulla sezion lineare AM si prenderà una porzione AB $= b$ è evidente (num. 31.) che la quantità d' acqua corrispondente ad AB sarà $\frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}}$; quindi se in luogo di tenere aperta la sezione AM da A fino in M, la tenessim aperta soltanto da B fino in M chiudendone il vano BA, s' avrebbe nell' erogazione un difetto $= \frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}}$; onde stabilendo in B il principio delle assisse x, si avrebbe nella supposizione che l' acqua pervenisse al livello A; si avrebbe dico $q = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} \left(\overline{b+x}^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}} \right)$ cioè eguale alla diffe-

renza tra il rettangolo di tutta AM in $\frac{2}{3}$ MD ed il rettangolo del battente AB in $\frac{2}{3}$ BC.

35. Supposta la bocca GFGL (Fig. 1.) rettangolare, y diviene una costante che chiameremo L; e si avrà (num. 29.)

$$q = S.\,\mathrm{L}\,dx.\,\overline{b+x}^{\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{3}\mathrm{L}.\,\overline{b+x}^{\frac{3}{2}} + c = \tfrac{2}{3}\mathrm{L}\left(\overline{b+x}^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right)$$

la qual formola è quella stessa che noi, dipartendoci dai principj geometrici del N. A. avevamo già stabilita al num. 8; e fatto $b = o$ si ha $q = \frac{2}{3}\mathrm{L}.\,x^{\frac{3}{2}}$

Sezion triangolare:

36. Sia HML un triangolo colla punta rivolta al basso (Fig. 3.) e colla base HL orrizzontale: chiamando HL = L; BM = a; BE = x, sarà ME = $a - x$, e si avrà $a : \mathrm{L} :: a - x : \mathrm{FG} = \mathrm{L}.\frac{a-x}{a} = y$;

onde $q = Sy\,dx.\,\overline{b+x}^{\frac{1}{2}} = \mathrm{S}.\frac{\mathrm{L}}{a}.d.x.\,\overline{a-x}.\,\overline{b+x}^{\frac{1}{2}} -$

$$\mathrm{S.\,L}\,dx.\,\overline{b+x}^{\frac{1}{2}} - \mathrm{S}.\frac{\mathrm{L}}{a}x\,d.x.\overline{b+x}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\mathrm{S.\,L}\,dx.\,b\overline{+x}^{\frac{1}{2}} - \mathrm{S}.\frac{\mathrm{L}}{a}\,dx\,\overline{b+x}^{\frac{3}{2}} + \mathrm{S}\,\frac{\mathrm{L}}{a}\,b\,dx.\,\overline{b+x}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\mathrm{L}.\left(\tfrac{2}{3}\overline{b+x}^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{5.a}\cdot\overline{b+x}^{\frac{5}{2}} + \tfrac{2b}{3.a}\cdot\overline{b+x}^{\frac{3}{2}} + c\right)$$

E facendo $x = o$ nella qual ipotesi abbiamo $q = o$

si ha $c = -\mathrm{L}\left(\frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{15.a}\cdot b^{\frac{5}{2}}\right)$; epperò

$$q = \mathrm{L}\left(\tfrac{2}{3}.\overline{b+x}^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{5.a}.\overline{b+x}^{\frac{5}{2}} + \tfrac{2b}{3.a}.\overline{b+x}^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3}.b^{\frac{3}{2}} - \tfrac{4}{15a}.b^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$= \frac{2}{15.a} \mathrm{L.} \left(5\sqrt{5a-3x+2b.}\ \sqrt[2]{b+x^3} - 5\sqrt{5a-2b.}\ \sqrt[2]{b^3} \right)$$

e fatta $x = a$ si ha $q = \frac{2.}{15.a} \mathrm{L.}\left(2.\sqrt{a+b^5} - 5\sqrt{5a-2b.}\ \sqrt[2]{b^3} \right)$

37. Fatto $b = o$ si ha $q = \frac{4}{15} \mathrm{L.}\ a^{\frac{3}{2}}$

38. Al triangolo HML si circoscriva il rettangolo HI. La quantità d' acqua che da questa bocca rettangolare si scaricherà quando l' acqua premente sia a livello del lembo superiore HL, nel qual caso è $b = o$, sarà $\frac{2}{3} \mathrm{L.}\ x^{\frac{3}{2}}$; e fatto $x = a$, sarà $\frac{2}{3} \mathrm{L.}\ a^{\frac{3}{2}}$

Starà dunque l' acqua scaricata dal rettangolo HI senza battente alla scaricata dal triangolo inscritto HML :: $\frac{2}{3} \mathrm{L.} a^{\frac{3}{2}} : \frac{4}{15} \mathrm{L} a^{\frac{3}{2}}$ :: 5 : 2; e colla verticale BM dividendo il rettangolo HI per metà avremo l' acqua scaricata dal rettangolo BN alla scaricata dal triangolo HML :: $2\frac{1}{2} : 2 :: 5 : 4$.

39. Se il triangolo HBL avrà la base HL che formi della sezione la soglia, (Fig. 4:) ritenute le stesse denominazioni di sopra, avremo $q = \mathrm{S.} \underset{a}{\mathrm{L}} x dx.\ \sqrt[2]{b+x^1} = \mathrm{S.} \underset{a}{\mathrm{L}} dx \left(\sqrt[2]{b+x^3} - b.\sqrt[2]{b+x^1} \right) =$

$$\frac{2\mathrm{L}}{a} \left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{b+x^5} - \frac{2}{3} b.\ \sqrt[2]{b+x^3} + c \right) = \frac{2}{15} \frac{\mathrm{L}}{a} \left(\sqrt{3x-2b.}\ \sqrt[2]{b+x^3} + c \right)$$

Fatta $x = o$ si trova $c = \frac{4}{15} b^{\frac{5}{2}}$; onde $q = \frac{2}{15} \underset{a}{\mathrm{L}} \left(\sqrt{3x-2b.}\ \sqrt[2]{b+x^3} + \frac{4}{15} b^{\frac{5}{2}} \right)$

40. E se sarà $b = o$, ed $x = a$ avremo $q = \frac{2}{5} . \mathrm{L}\ a^{\frac{3}{2}}$; Quindi se sulla soglia HL apriremo la bocca rettangolare NL dell' altezza MB avremo l' acqua scaricata dal triangolo HBL colla punta rivolta in alto, e senza battente, all' acqua scaricata dal rettangolo

circoscritto :: $\frac{2}{5}$ L $a^{\frac{3}{2}}$: $\frac{2}{3}$ L $a^{\frac{3}{2}}$ :: 6 : 10 ; e diviso NL per metà colla verticale BM sarà l'acqua scaricata dal triangolo HBL alla scaricata dal rettangolo NM :: 6 : 5. Ma si è veduto (num. 38) che l'acqua scaricata dal rettangolo BN (fig. 3) sta alla scaricata dal triangolo HML colla punta rivolta al basso :: 5 : 4. Dunque supposto che le aree dei due triangoli (fig. 3, e 4) sieno eguali, avremo l'acqua scaricata dal triangolo HML, (fig. 3) dal rettangolo BN, dal triangolo NBL (fig. 4.) che hanno tutti un'area eguale, nella proporzione 4 : 5 : 6.

Sezioni Ellittiche e Circolari.

41. Sia BHML (fig. 5) un ellissi. Chiamando l'asse trasverso BM $= a$, il conjugato HL $=$ L avremo per la proprietà dell'ellissi, FG $= \frac{2L}{a} . \overline{ax - xx}^{\frac{1}{2}}$. Dunque (num. 30) sarà

$$q = S. \frac{2L}{a} dx . \overline{ax - xx}^{\frac{1}{2}} \overline{b + x}^{\frac{1}{2}}.$$

Affinchè questa formola sia suscettibile d'integrazione conviene svolgere in serie il binomio $\overline{b + x}^{\frac{1}{2}}$. Noi lo svolgiamo nella maniera seguente $\overline{b + x}^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{b^2}{8x^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^3}{16x^{\frac{5}{2}}} - b.$

Questa serie tanto più rapidamente converge quanto è $b < x$; ossia di a, a cui finalmente x s'uguaglia e noi supponendolo picciolissimo ci potremo nell'integrazione accontentare dei soli primi due termini. E in questo caso si ha

$$S \frac{2L}{a} . dx . \overline{ax - xx} . \overline{b + x}^{\frac{1}{2}} = \frac{L}{a} S. dx \left(2x . \overline{a - x}^{\frac{1}{2}} + b . \overline{a - x}^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= \frac{L}{a} S. dx \left(- 2 . \overline{a - x}^{\frac{3}{2}} + \overline{b + 2a} . \overline{a - x}^{\frac{1}{2}} \right) =$$

$$\frac{L}{a} . \left(\frac{4}{5} \overline{a - x}^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} . \overline{2a + b} . \overline{a - x}^{\frac{3}{2}} + c \right) =$$

$\frac{2}{15}\frac{L}{a}\left(-\sqrt{4a-6x-5b}.\ \overline{a-x^2}^{\frac{3}{2}} + \sqrt{4a+5b}.\ a^{\frac{3}{2}}\right)$

Fatta $x = a$ si avrà $q = \frac{2L}{15}\sqrt{4a+5b}.\ a^{\frac{1}{2}}$;

e se la bocca fosse senza battente, risulterebbe $q = \frac{8L}{15}a^{\frac{3}{2}}$

42. All' ellissi si circoscriva il rettangolo RS: l' acqua che questo scaricherebbe senza battente, sarebbe (num. 35) da esprimersi per $\frac{2}{3}L\ a^{\frac{3}{2}}$. Dunque avremo l' acqua scaricata dal rettangolo circoscritto alla scaricata dall' ellissi inscritto che abbia i suoi assi paralleli ai lati del rettangolo $:: \frac{2}{3}L\ a^{\frac{3}{2}} : \frac{8}{15}La^{\frac{3}{2}} :: 5 : 4$.

43. Ma noi abbiam veduto (num. 38) che il rettangolo BN che abbia il lato $HB = \frac{HL}{2}$ (fig. 3) e il lato HN eguale all' altezza BM del triangolo HML colla punta rivolta al basso scarica una quantità d' acqua che sta alla scaricata dal triangolo $:: 5 : 4$. dunque se si formerà una bocca triangolare la cui base a fior d' acqua sia $= 2RI = 2HL$, e l' altezza $= BM$ si scaricherà da questa una quantità d' acqua come dall' ellissi MHBL.

44. Se l' ellissi convertirassi in cerchio noi avremo $L = a$ dunque pel cerchio avremo (num. 41) $q = \frac{2}{15}\sqrt{4a+5b}.\ a^{\frac{3}{2}}$, e se la bocca fosse senza battente si avrebbe $q = \frac{8}{15}a^{\frac{5}{2}}$.

45. Ripigliando la formola ellittica (num. 41) $q = \frac{2}{15}\frac{L}{a}$ $\left(-\sqrt{4a-6x-5b}.\ \overline{a-x}^{\frac{3}{2}} + \sqrt{4a+5b}.\ a^{\frac{3}{2}}\right)$ se in luogo di fare $x = a$; faremo $x = \frac{a}{2}$ avremo la quantità d' acqua che sgorga dal semiellissi superiore HBL. Fatte le dovute sostituzioni e fatto $b = o$; $L = a$ per trasportare l' equazione al cerchio avremo

$q = \frac{4}{3}a^{\frac{5}{2}}.\ o,\ 6464 - \frac{4}{5}a^{\frac{5}{2}}.\ o,\ 8232 = a^{\frac{5}{2}}.\ \frac{3,0496}{15}$.

46. Ora si è ritrovato (num. 44) che l'acqua scaricata da tutto il cerchio è $\frac{8}{15} a^{\frac{5}{2}}$. Dunque se il semi-cerchio superiore scarica una porzione $= a^{\frac{5}{2}} \frac{3,0496}{15}$, ne resterà per l'inferiore, $4,9504 . a^{\frac{5}{2}}$ onde nella bocca circolare senza battente l'acqua scaricata dal semicerchio superiore starà alla scaricata dall' inferiore :: 30496 : 49504 :: 0, 616 : 1.

47. Ognun vede che l'eccesso d'acqua che scarica il semicerchio inferiore dipende dall' esser esso tutto sommerso sotto una profondità maggiore d' acqua premente. Ma se l' acqua premente radesse il diametro HL, la cosa succederebbe diversamente, e minor quantità d'acqua si scaricherebbe da HML, che da HBL.

48. Cerchisi ora la quantità d' acqua dal segmento circolare FHMLG senza battente. Facendo, come sopra, in B il principio delle assisse si chiami $BE = b$; è evidente che l' altezza premente su le varie sezioni ON no sarà da esprimersi per $x - b$, onde se nella formola del num. 41. $\frac{L}{a}\left(\frac{4}{5}\sqrt{a-x}^{5} - \frac{2}{3}\sqrt{2a+b}.\sqrt{a-x}^{3} + c\right)$ varieremo in b il segno $+$ in $-$; e faremo $L = a$ avremo la formola, che ne esprime la quantità d' acqua tramandata dal segmento circolare FHMLG senza battente. La qual formola semplificata come al num. 41. ci da

$$q = \frac{2}{15}\left(\sqrt{-4a-6x+sb}.\sqrt{a-x}^{3} + c\right)$$

Presentemente nel determinare la costante c non abbiamo da fare $x = o$, ma $x = b$. il che fatto si ha

$c = \frac{2}{15}\sqrt{4a+b}\sqrt{a-b}^{3}$; onde

$$q = \frac{2}{15}\left(\sqrt{-4a-6x+sb}.\sqrt{a-x}^{3} + \sqrt{4a+b}.\sqrt{a-b}^{3}\right)$$ Fatto $x = a$

si ha $q = \frac{2}{15}\sqrt{4a+b} : \sqrt{a-b}^{2}3$

Fatto $b = \frac{a}{8}$ si ha $q = \frac{6,752}{15} \cdot a^{\frac{5}{2}}$

Della velocità media.

49. Se la quantità d' acqua, che in un dato tempo sorte per una data sezione dividerassi per questa medesima sezione, si avrà quella che chiamasi velocità media, cioè quella velocità da cui (se tutte le particelle acquee ne fossero egualmente affette) si avrebbe nell' erogazione la stessa quantità, che hassi attualmente con velocità diverse, nelle diverse altezze.

50. Ripigliando novamente la sezione HBL (Fig. 1.) si ha (num. 30.) FG $gf = ydx$; e l'area HBL $= S.ydx$. Ora essendo (num. 30.) $S.ydx \,.\, b + x^{\frac{1}{2}}\, p^{\frac{1}{2}}$ L'espression generale della quantità d'acqua, chiamata v la velocità media avremo $v = \frac{S.ydx \,.\, b + x^{\frac{1}{2}}\, p^{\frac{1}{2}}}{S.ydx}$

51. E per la sezion lineare sarà $v = \frac{S.dx \,.\, b + x^{\frac{1}{2}}\, p^{\frac{1}{2}}}{S.dx} =$ $\frac{2}{3}\, p^{\frac{1}{2}} \left(b + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x} \right)$; e fatto $b = o$ $v = \frac{2}{3} \sqrt{px}$; e fatta $x = a$, $v = \frac{2}{3} \sqrt{pa}$

52. Nella sezion lineare AM (Fig. 2.), che suppongo senza battente cerchiamo il punto x, a cui corrisponde la velocità media $v = \frac{2}{3} px$. Poichè nella parabola AZD l'ordinata XZ rappresenta la velocità corrispondente ad AX, chiamando AM $= a$, AX $= x$ avremo (num. 51.) $v = \sqrt{px} = \frac{2}{3} \sqrt{pa}$; onde $x = \frac{4}{9} . a = \frac{4}{9} . \text{AM} = \frac{\text{AM}}{2} - \frac{\text{AM}}{18}$: cioè a dire nella sezion lineare senza battente il punto ove cade la velocità media, sta sopra il centro della sezione istessa d'un dicciottesimo di tutta la sua altezza.

53. Lo stesso dicasi pure della sezion rettangolare, la quale potendosi riguardare come generata dallo scorrimento d'una sezion

lineare sulla soglia della rettangolare, dovrà necessariamente avere il punto della velocità media alla stessa profondità della sezion lineare.

54. Nella sezion triangolare, che abbia la sua punta rivolta al basso (Fig. 3.) abbiam trovato (num. 36.) $y = \text{L.}\frac{a-x}{a}$. dunque

$$\frac{S.y^{\frac{1}{2}}dx \,.\, b+x^{\frac{1}{2}} \,.\, p^{\frac{1}{2}}}{S.ydx} = \frac{S.L\frac{a-x}{a} \,.\, dx \,.\, b+x^{\frac{1}{2}} \,.\, p^{\frac{1}{2}}}{S.L.\frac{a-x}{a} \,.\, dx} =$$

e fatto $b = o$ si ha $v = \frac{p^{\frac{1}{2}} \text{ L.}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \frac{2}{5}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{a}\right)}{L.\left(x-\frac{x^2}{2a}\right)}$

e fatta $x = a$ si ha $v = \frac{8}{15} a^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}}$

se chiameremo x la profondità del punto X, a cui appartiene la velocità media, si avrà

$p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{8}{15} a^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}}$ dal che risulta

$x = \frac{64}{225}. a$; e poichè il centro della figura triangolare è, come ognun sa, distante dalla sua base HL per un terzo dell' altezza del triangolo HML; perciò il punto X della velocità media sarà distante dal centro del triangolo per un intervallo $= 0{,}0408.a$

55. Se la base HL (Fig. 4.) coincidesse colla soglia orizzontale della sezione, l'espressione della velocità media, ove non siavi alcun battente sarà (num. 39.)

$$v = \frac{2}{5} \frac{L.a^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}}}{La} = 4 a^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}}$$

dal che risulta $BX = x = \frac{16}{25} a$. Ma la distanza del centro della figura dal vertice B è $\frac{2}{3}. a$. dunque la distanza del centro della fi-

gura dal punto ove cade la velocità media sarà
$\frac{2}{3} . a - \frac{16}{25} . a = \frac{2}{75} . a = 0,0266 . a$

56. Prendendo 7 : 22 la ragione tra 'l diametro, e la periferia del cerchio, chiamato a il diametro, l' area circolare sarà $\frac{11}{14} . a^2$. Essendosi pertanto ritrovata da noi (num. 44.) trovata la quantità d'acqua, che si scarica dalla sezion circolare senza battente, $= \frac{8}{15} a^{\frac{5}{2}}$, troveremo col solito metodo $BX = x = \frac{12544 . a}{27225}$ ora il centro del cerchio dista dal vertice per uno spazio $= \frac{a}{2}$, dunque la distanza del punto X dal centro del cerchio sarà $a - \frac{12544 . a}{27225} = 0,0392 . a$

57. Noi abbiamo fin quì considerate le bocche senza battente: quando vi avessim voluto considerare il battente avremmo trovato, che la distanza tra 'l punto della velocità media, e 'l centro della figura riesce minore di mano in mano, che il battente si fa maggiore. In fatti è evidente, che la predetta distanza riuscir deve tanto minore, quanto minore è la differenza di velocità negli strati di acqua, che si succedon nelle diverse altezze. Ma quanto più cresce il battente, altrettanto la differenza di velocità negli strati d'acqua, che si succedon nelle diverse altezze diventa minore; Imperciocchè AB ci rappresenti l' altezza d' una bocca senza battente; BX = AB l'altezza d'una bocca con un battente AB: prendansi nella bocca AB senza battente due ordinate mn, sr infinitamente prossime: Chiamando x le assisse; y le ordinate; dx le differenze delle prime; dy le differenze delle seconde, avremo, prescindendo dal parametro, $dy = dx^{\frac{1}{2}}$, e prendendo parimente nella bocca BX le assisse zx, tu infinitamente prossime; e fatto il principio delle assisse in B, e chiamato $AB = a$ avremo $dy = \frac{dx}{2.(a+x)^{\frac{1}{2}}}$ $< \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}$. Adunque nelle bocche fornite di battente, il punto della

velocità media si accosterà tanto più al centro della figura quanto il battente sarà maggiore. E se noi volessimo supporre una bocca con un battente d'altezza infinita, la velocità media col centro della figura coinciderebbe.

Degli elementi da cui dipende la grandezza dell' erogazione.

58. La quantità d'acqua essendo eguale al prodotto della velocità nella sezione; e le velocità nelle acque, che si movon per pressione essendo come le radici delle altezze prementi, si vede che i principj da cui le quantità d'acqua sgorganti dipendono, sono l'altezza premente, e la sezione. Gli elementi dell'altezza premente poi, sono il battente, e l'altezza della sezione, e gli elementi d'una sezion qualunque, d'una determinata figura, ossia determinata equazione, sono larghezza e altezza; quindi si vede che gli elementi da cui risulta la quantità d'acqua, che sorga per sola pressione, sono altezza della sezione, sua larghezza, e battente. In tutti i calcoli, fatti fin quì, questi tre elementi si sono sempre assunti come dati; e dalla loro varia combinazione secondo la varietà delle figure, che avea la sezione, s'è dedotto il valore dell'erogazione. Presentemente supporrem cognito il valor dell'erogazione che è q, e supponendo pure cogniti due de' tre predetti elementi, cercheremo il modo di determinare il terzo.

59. Non ci fermeremo però a ricercare come data la quantità d'acqua, il battente, e l'altezza della sezione si trovi di questa la larghezza, perchè in tutte le equazioni da noi trovate nel calcolare le diverse quantità d'acqua che sgorgan dalle sezioni diverse il valore di L è di tanto facile separazione, che sarebbe far torto a' Leggitori il fermarci ad indicargli il metodo per ottenerla. Prenderem dunque in considerazione il battente soltanto, e l'altezza della bocca.

60. In una bocca rettangolare, che ha la soglia paralella all'orizzonte sia data la quantità relativa d'acqua q che sgorga, l'altezza a, la larghezza L: se ne cerca il battente b.

L'equazione che ci fornisce nelle bocche rettangolari le quantità

d' acqua relative è (num. 14.) $\frac{2}{3} L \left(\overline{a+b}^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}} \right) = q$

Questa equazione essendo di sesto grado non è risolvibile, che col metodo delle approssimazioni. Le cose che intorno alla velocità media noi abbiam dette dal num. 49 fino al 51, ne faciliteranno assaissimo questo metodo, non sol per rispetto alle bocche rettangolari, ma a tutte le altre, che nel seguito potranno essere da noi considerate. Per ciò che alle rettangolari, appartiene dispongo l' equazion superiore nel modo seguente

$\frac{3q}{2L} + b^{\frac{3}{2}} = \overline{a+b}^{\frac{3}{2}}$ e questa equazione noi chiameremo B.

Per mezzo poi della velocità media cominceremo a determinare per il battente b un valore poco discosto dal vero; questo valore noi sostituiremo al b, che si trova nel primo membro dell' equazione B, e maneggiando in seguito la stessa equazione B, ne caveremo un valore, che sarà più prossimo al vero del primo; questo valore secondo di b sostituito in luogo del primo nel primo membro dell' equazione B ci darà un terzo valore più prossimo al vero del secondo, e collo stesso andamento procedendo noi a fare nuove sostituzioni ci potremo al vero valore del battente accostare quanto ci tornerà più a grado. Facciamone le attuali operazioni.

61. Si è da noi dimostrato (num. 52; 53), che in una sezion rettangolare senza battente il punto ove cade la velocità media non è discosto dal centro della figura (che è alla metà di sua altezza) se non d' un dicciottesimo dell' altezza; in oltre si è dimostrato (num. 57), che nelle sezioni fornite di battente il predetto punto s'accosta di più al centro della figura, che nelle altre che non han battente, in modo che se il battente avesse un altezza infinita, il predetto punto cadria nel centro stesso della figura. Dunque se noi supporremo che il predetto punto della velocità media cada ad un trentesimo sesto di tutta l'altezza a sopra il centro della figura, tutto l' error possibile che si ammetterà in questa supposizione non uguaglierà che un altro trentesimo sesto di a, il qual trentesimo sesto potrà egualmente essere per eccesso, o per difetto.

Ciò posto, essendo la velocità media (num. 49.)

$v = \frac{q}{La}$ si avrà $v^2 = \frac{q^2}{L^2 a^2}$. Ma quando si tratta di velocità relative, il loro quadrato è eguale all' altezza da cui sono prodotte: dunque chiamando quest' altezza A, avremo $A = \frac{q^2}{L^2 a^2}$ ed $A + \frac{a}{36} = \frac{q^2}{L^2 a^2} + \frac{a}{36}$; ma si è supposto, che la velocità media (che è generata dall' altezza A) cada sopra il centro della figura d'una porzione $= \frac{a}{36}$. Dunque sarà $A + \frac{q}{36}$ l' altezza sovraincombente al centro della figura. Ma quest' altezza sovraincombente al centro della figura è $b + \frac{a}{2}$. Dunque avremo per l'equazione antecedente

$b + \frac{a}{2} = \frac{q^2}{L^2 a^2} + \frac{a}{36}$ dal che risulta il battente $= \frac{q^2}{L^2 a^2} - \frac{17 \cdot a}{36}$ che noi chiameremo b'.

62. Questo valore b' sostituiscasi ora in luogo di b nel 1.° membro dell' equazione B, si avrà $\frac{3q}{2L} + \left(\frac{q^2}{L^2 a^2} - \frac{17\,a}{36} \right)^{\frac{3}{2}} = \overline{a + b^2}^{\frac{3}{2}}$; ossia $\frac{3q}{2L} + b'^{\frac{3}{2}} = \overline{a + b^2}^{\frac{3}{2}}$; epperò $\left(\frac{3q}{2L} + b'^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} - a = b$; il cui valore noi chiameremo b'', e sarà più prossimo al vero del valore b' trovato nel numero antecedente; e se nel primo membro dell' equazione B, in luogo di b sostituirassi b'' avremo il battente $= \left(\frac{3q}{2L} + b''^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} - a$ che noi chiameremo b''', che sarà più prossimo al vero di b''; e così procedendo col sostituire successivamente nel primo membro dell' equazione B, il valor del battente ultimamente trovato ci potremo accostare al suo vero valore oltre ogni limite dato.

63. Prendasi ad esempio l'oncia d'acqua milanese, il cui battente (sebben si sappia esser = 2) suppongasi incognito. Essendo $a = 4$; $L = 3$; $q = 23{,}732$ sarà $\frac{q}{La} = v = \frac{23{,}732}{12} = 1{,}977$; epperò (num. 61) $b' = 3{,}907 - 1{,}889 = 2{,}018$, il qual valore non differisce dal vero, che di soli 18 millesimi, e cercando (num. 62) il valore b'' si troverà essere $= (13{,}733)^{\frac{2}{3}} - 4 = 2{,}009$, che ci da la metà soltanto della differenza anteriormente ritrovata, procedendo così a ricercare il valore di b''', di b^{IV} ec., noi ci possiamo oltre ogni limite al vero valor accostare del battente 2; o di qualsivoglia altro quando il suo valore diverso fosse di quello dell'oncia Milanese.

64. Quando si vede che le differenze, che si trovano nei successivi valori b, b', b'' ec. sono picciolissime e trascurabili, allora è segno che noi siamo al vero valor del battente vicinissimi.

65. Se ci fosse stata data non la quantità d'acqua relativa, ma l'assoluta, allora $\frac{q}{La}$ uguaglierebbe non la velocità relativa ma l'assoluta, la qual velocità assoluta è la radice dell'altezza nella radice del parametro; onde in luogo di fare come al num. 61. si è fatto, $v^2 = \frac{q^2}{L^2 a^2} = A$ si dovrebbe invece fare $v^2 = \frac{q^2}{L^2 a^2} = Ap$; epperò

$$A = \frac{q^2}{p.L^2 a^2}$$

66. Cerchisi ora il battente nella bocca triangolare un lato de' quali sia orizzontale, e formi della bocca il lembo superiore.

L'equazione per questa bocca (n. 36.) è $q = \frac{2L}{15.a}\left(2.a + b^2\right)^{\frac{5}{2}} - \overline{sa - 2b.b^2}^{\frac{2}{2}}$

la quale, disposta nella maniera che siegue

$\frac{15.aq}{4L} + \overline{\frac{sa + 2b}{2}}.b^{\frac{3}{2}} = \overline{a + b^2}^{\frac{5}{2}}$, chiamo B.

Sia $a = 6$; $L = 7\frac{1}{2}$; la quantità relativa $q = 54{,}743$; avremo

$v = \frac{2q}{La} = \frac{109,486}{45} = 2,433$; onde vv che è l'altezza A da cui è cagionata la velocità media v sarà 5,9195.

Ora (num. 54 , e 57) la differenza massima tra A , e l'intervallo tra 'l centro del triangolo , e la superficie dell' acqua premente è $= 0,405.a = 0,243$, la cui metà è 0,1215 ; dunque se noi nel caso presente supponessimo , che il punto x (Fig. 3.) della velocità media cadesse nel luogo di mezzo tra la massima , e la minima distanza dal centro del triangolo , avremmo

$A + 0,1215 = b + \frac{a}{3}$; e sostituiti ad A , ed a i suoi corrispondenti valori avremmo b ch' io chiamo $b' = 4,0409$. Questo valore b' sostituito in luogo di b nell' equazion superiore B ne fornirà

$\frac{15.aq}{4L} + \frac{sa + 3,0818}{2} \cdot 8,123 = \overline{a + b^2}^{\frac{5}{2}}$; dal che si ha b , che io chiamo $b'' = \overline{318,898}^{\frac{2}{5}} - a = 4,0335$.

Se questo valore b'' sostituiremo in luogo di b nel primo membro dell' equazione B noi avremo per il battente cercato un valore che si accosterà al vero valore più da vicino di quello , che abbiamo anteriormente trovato.

E se procedendo collo stesso metodo , noi cercheremo altri valori b''' ; b^{IV} ec. , e successivamente li sostituiremo in luogo di b nell' equazione B , ci potremo accostare al vero valor del battente al di là di qualsivoglia determinato limite.

67. Quello che presentemente abbiam detto sulla maniera di trovare per approssimazione il battente d' una bocca triangolare , che abbia la sua punta rivolta al basso ne indica il modo , che tener si dee per trovarlo anche nelle bocche triangolari , che abbian la punta rivolta in alto ; Imperciocchè l'equazione da noi trovata (num. 39.) per queste bocche , è suscettibile delle stesse operazioni che noi abbiamo usate nel numero antecedente.

68. Non ci fermeremo poi a cercare il battente nelle bocche ellittiche o circolari , perchè se l'acqua riempie della bocca tutto il vano (come si supponeva ai num. 41 , e 44) la separazione del bat-

battente b si ottien facilissimamente senza aver bisogno del metodo delle approssimazioni; che se l'acqua non riempisse della bocca il vano interamente, (come al num. 48.) la maniera da noi usata nelle bocche triangolari (num. 66.) ci farebbe abbastanza conoscere come dobbiamo procedere anche per riguardo a quelle sezioni, che sono segmenti di ellissi o di cerchio. Quindi noi passeremo dal battente all' altezza delle bocche.

69. Nelle equazioni che per le sezioni lineari, e rettangolari abbiamo trovate dal num. 31 fino al 36 inclusivamente la x, che n' esprime della sezion l' altezza, si può facilmente separare senza aver ricorso al metodo delle approssimazioni; non è però così delle triangolari, ed ellittiche in cui il metodo delle approssimazioni ci è necessario; anzi non potendo noi (per fissare in queste approssimazioni i limiti) far uso della velocità media, come ne abbiam fatto uso quando si trattava del battente, perchè c' ingolferessimo in un' equazione di terzo grado, ci converrà per la determinazione de' predetti limiti ricorrere ad altri artifizj.

70. Sia da trovarsi l'altezza a nella bocca triangolare colla punta rivolta al basso. La sua equazione (num. 36.) è

$q = \frac{2}{15}\frac{L}{a}\left(2 . \overline{a+b^2}^{\frac{5}{2}} - \overline{sa-b} . b^{\frac{3}{2}}\right)$, che io chiamo A

se fosse $b=o$; avremo $a = \left(\frac{15}{4}\frac{q}{L}\right)^{\frac{2}{3}}$ e non si avria bisogno del metodo d'approssimazione: ma quando b non è zero bisogna ricorrervi; e a questo fine per non gettare molte operazioni invano convien ritrovare i limiti entro a' quali il valore di a si può ristringere. Ora è evidente che è $\overline{a+b^2}^{\frac{5}{2}} > a^{\frac{5}{2}} + 2ab^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{5}{2}}$ dunque se nel secondo membro dell' equazione A, in luogo di $\overline{a+b^2}^{\frac{5}{2}}$ sostituiremo $a^{\frac{5}{2}} + 2ab^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{5}{2}}$ risulterà $q > \frac{2}{15}\frac{L}{a}\left(2a^{\frac{5}{2}} - ab^{\frac{3}{2}}\right)$ trascurato $b^{\frac{5}{2}}$; onde $q > 2\frac{L}{15} . \left(2a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right)$; epperò $a > \left(\frac{15}{4}\frac{q}{L} - \frac{b^{\frac{3}{2}}}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ che io chiamo a';

onde $a' > a$. In oltre essendo $\overline{a+b^2}^5 = \overline{a+b}^2 . \overline{a+b^2}^1$, avremo

$\frac{15aq}{4L} < \sqrt{a^2+2ab+b^2}\ \overline{a+b^2}^1 \cdots \frac{sab^2 \cdots 2b^2}{2}$, e fatto $\overline{a'+b^2}^1 = c$

essendo a' quantità cognita, avremo $a^2 + \left(2b \cdots \frac{sb^2}{2c} \cdots \frac{15q}{4Lc}\right)a = \frac{b^2}{c}^5 \cdots b^2$; ed $a > \frac{15.q}{8Lc} + \frac{sb^2}{4c}^3 - b + \sqrt{\frac{b^2}{c}^5 \cdots b^2 + \left(b \cdots \frac{sb^2}{4c}^3 \cdots \frac{15.q}{8Lc}\right)^2}$; il qual valore io chiamo a''; Adunque i due limiti di a' sono a; a''.

71. Sia $L = 6$; $b = 3$; $q = 40$: avremo $a' = (27,598)^{\frac{2}{3}} = 9,13$; avremo in oltre $c = \sqrt{a'+b} = 3,483$; onde $a'' = 2,453 + \sqrt{1,492}$; e preso il segno $+$ si ha $a'' = 3,674$. I limiti pertanto entro a' quali è contenuto a sono 9,13., 3,674., limiti assai discosti tra loro; ma se noi secondo il costume prenderemo tra questi due numeri l'intero 6., che sta di mezzo, ci troveremo dal vero valore discosti per pochi decimi soltanto.

72. Determinati così di a i limiti, ripigliamo l'equazione A (num. 10.) e disponiamola nella maniera seguente

$\left(\frac{15.qa}{2L} + \sqrt{sa+2b} . b^2\right)^{\frac{2}{5}} - b = a$, la qual equazione io chiamo B;

se noi nel primo membro di questa daremo ad a il valore 6, troveremo il valore di a nel secondo membro essere $= 6,2341$, che noi chiameremo a'''. Se nel medesimo primo membro dell'equazione sostituiremo ora a''' in luogo di a, troveremo per l'a del secondo membro un valore ancor più prossimo al vero, e continuando così successivamente la stessa operazione arriveremo a tutta l'esattezza possibile.

73. Abbia la sezion triangolare rivolta in alto la sua punta: la sua equazione (num. 39.) fatto $x = a$ è

$q = \frac{2L}{15.a}\left(\sqrt{3a-2b} . \overline{b+a^2}^3 + 2b^2\right)$. La quale chiamo A.

Ora essendo $b^{\frac{1}{2}} < a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$; epperò $2b \cdot b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2}} > 2ab^{\frac{3}{2}} + 2b^{\frac{5}{2}}$

avremo $\frac{15.q}{2L} + 2b^{\frac{3}{2}} < 3 \cdot b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2}}$; onde $a > \left(\frac{15q}{6L} + \frac{2b^{\frac{3}{2}}}{3} \right)^{\frac{2}{3}} - b = a'$;

Quindi per la stessa equazione A si avrà

$\frac{15a'q}{2L} > \overline{3a' - 2b} \cdot b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2}} + 2.b^{\frac{5}{2}}$; dal che si ha

$$a < \left(\frac{15.a'q - 2.b^{\frac{5}{2}}}{3a' - 2b} \right)^{\frac{3}{2}} - b = a''$$

Abbiamo per tanto a', ed a'' per limiti entro a' quali è contenuta l' altezza a .

74. Sia la quantità relativa $q = 68$; $b = 2$; $L = 7\frac{1}{2}$; noi avremo $a' = 6,44$: ed $a'' = \left(28,4453 \right)^{\frac{2}{3}} - 2 = 7,318$, onde i limiti di a sono 6,44. , e 7,318.

75. Per approssimarci ora sempre più al vero valore di a dispongo l' equazione A nel modo che siegue

$$a = \left(\frac{15.aq - 2b^{\frac{5}{2}}}{3a - 2b} \right)^{\frac{2}{3}} - b$$; che io chiamo B.

Nel secondo membro di questa equazione B. sostituisco 7. in luogo di a ; e trovo $a = \left(\frac{464,688}{17} \right)^{\frac{2}{3}} - 2 = 7,07$ che io chiamo a'''. Sostituisco, nel secondo membro della stessa equazione B, a''' in luogo di a ; e ritrovo per questo un valore a^{IV} più prossimo al vero ; prosieguo l' operazione fintantochè la differenza tra i valori successivamente ritrovati è trascurabile, ed allora il valore per a è, per quanto alla pratica, abbastanza esatto.

76. Vengo all' ellissi la cui equazione è (num. 41.) $q = \frac{2L}{15} \cdot \overline{4a + sb} \cdot a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2}}$; sarà dunque $15.q > a^{\frac{3}{2}}$; onde $a < \left(\frac{15.q}{8L} \right)^{\frac{2}{3}} = a'$

77. Se dai valori dati di q, di L, di b si conoscerà dover essere a un intero il che accaderà frequentemente, noi potremmo avere anche un limite più ristretto facendo

$$a < \left(\frac{15}{8} \frac{q}{L} - \frac{s^b}{4} \right)^{\frac{2}{3}} = a'$$

78. Qualunque però sia il valore di a' che abbiasi a prendere avremo sempre $q < L\left(\frac{8}{15} a^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} b\, a^{\frac{1}{2}} \right)$; ed

$$a > \left(\frac{15}{8L} q - \frac{sb}{4} . a^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} = a''$$

79. Sia $b = 1$; $L = 10$; $q = 164$. Ognun vede, che essendo questa quantità d'acqua sette once in circa d'acqua milanese, dovrà col battente $= 1$, e colla larghezza $= 10$ avere un' altezza assai maggiore di un' oncia; quindi per a' prenderem la formola del num. 77., per mezzo della quale trovasi $a' = 9{,}16.$, ed $a'' = 8{,}999.$

Ripigliando l'equazione A, la dispongo nella maniera che siegue $\left(\frac{15}{8L} q - \frac{5}{4} . b a^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} = a$; e la chiamo B.

Nel primo membro di questa equazione B, in luogo di a sostituisco 9, che è un medio tra a' ed a'': il primo membro diventa $(27)^{\frac{2}{3}}$; onde ho $(27)^{\frac{2}{3}} = a = 9$; il che dimostra che il valor medio da noi assunto per a è il vero valore di a.

80. Da quello che si è detto al num 45 per le sezioni semicircolari, non facendo svanire il valore b, abbiamo $q = a^{\frac{5}{2}} . 0{,}2033 + a^{\frac{3}{2}} b. 0{,}5082.$, la qual equazione chiamo A; e poichè al num. 41 si è supposto b assai piccolo per rispetto ad a, a non potrà essere una frazione; onde avremo

$$\frac{q - b . 0{,}5082}{0{,}2033} > a^{\frac{5}{2}}; \text{ onde } \left(\frac{q - b . 0{,}5082}{0{,}2033} \right)^{\frac{2}{5}} = a'$$

Avre-

Avremo anche $q < a^{\frac{5}{2}} . 0{,}2033 + b\, a^{\frac{3}{2}} . 0{,}5082$; e quindi

$$a > \left(\frac{q - b\, a^{\frac{3}{2}} . 0{,}5082}{0{,}2033}\right)^{\frac{2}{5}} = a''$$

81. Sia $b = \frac{1}{2}$; $q = 80$; avremo $a' = (342{,}257)^{\frac{2}{5}} = 10{,}312$; ed $a'' = (301{,}991)^{\frac{2}{5}} = 9{,}8174$. Dispongasi l'equazione A nella maniera seguente $\left(\frac{q - a^{\frac{3}{2}} b . 0{,}5082}{0{,}2033}\right)^{\frac{2}{5}} = a$. la qual equazione chiamo B; e preso il 10 per il valor medio tra i due limiti a', ed a'', questo valor 10 si sostituisca in luogo di a nel primo membro dell'equazione B; e troveremo per a, che ne forma il secondo membro un valore a''', che al vero valore di a sarà più prossimo del 10.; e si continui la stessa operazione infin a tanto, che le differenze de' valori, che successivamente si ritrovano, sono in pratica trascurabili.

Accelerazion prodotta dalla declività del letto.

82. I calcoli fatti fin quì suppongono, che l'acqua sorta dalle bocche con quella velocità, nè più, nè meno, che si deve alla pressione; ma talvolta la velocità viene accresciuta dalla declività del letto; talvolta per contrario dal rigurgito è diminuita. La giusta distribuzion delle acque richiede, che queste cagioni straniere siano da noi con tutta la possibile esattezza ridotte a calcolo, per apporvene poi il dovuto compenso. Incominciamo dalla accelerazione, che la declività del letto produce.

83. Se la declività del letto cagionasse la stessa acceleraziene in tutte le varie profondità delle sezioni, che si movon verso la bocca di derivazione, l'uso del galleggiante proposto dal N. A. sarebbe opportunissimo al caso presente; ma la velocità in superfizie non è quella verso il fondo, nè anche in que' tratti ove il moto della corrente è dovuto alla sola declività del letto, come si potrebbe facilmente dimostrare e colla ragione, e coll'esperienza.

E' dunque necessario a tutt' altro spediente ricorrere, che a quello del galleggiante. Io in una delle mie dissertazioni idrauliche tom. II. pag. 112 e seg. ho dimostrato, che nel sifon ricurvo di Pitot la differenza di livello tra l'acqua nel sifone, e l'acqua esteriore rappresenta precisamente quell' altezza a cui è dovuta la velocità, che dalla declività del letto dipende. Ciò posto, ecco il modo di corregger l' eccesso d' acqua cagionato dalla declività del letto.

84. Sia BM (Fig. 2.) l'altezza d'una bocca qualunque, ed AB il suo battente. Si divida BM nelle parti eguali BX, XF, FM. Si cominci a sperimentare col sifone in BX, facendo in modo che l'asse del di lui braccio più corto rivolto contro la corrente cada nel mezzo di B ed X, e chiamisi d la differenza che si trova tra il livello dell' acqua interiore al sifone, e l'acqua esteriore; lo stesso operisi in seguito in XF, in FM; chiamando la differenza in XF $= d'$; in FM $= d''$. Suppongansi BX, XM, XF tre bocche distinte, e si calcoli separatamente l'una dall' altra la quantità d'acqua, che ciascuna dee tramandare, coll' aggiugnere ai rispettivi battenti la differenza d, d', d'' che abbiamo ritrovata col sifone; quindi per la prima bocca BX il battente sarà $b+d$; e chiamando a l'altezza BX, il battente nella bocca XF sarà $b+d'+a$, e nella terza bocca FM il battente sarà $b+d''+2a$.

85. Prendasi in esempio la bocca rettangolare dell' oncia d'acqua milanese: divisane l' altezza in quattro parti, d' un oncia ciascuna, suppongasi, che nelle sperienze col sifone siasi trovato $d =$ 6 punti; $d' = 5$; $d'' = 4$; $d''' = 2$; noi avremo per la sezion più alta la somma di battenti $=$ onc. 2. p. 6., per la seconda $=$ onc. 3, p. 5; per la terza $=$ onc. 4, p. 4; per la quarta $=$ onc. 5, p. 2. Facendo uso della seconda tavola parabolica si trova, che la quantità d' acqua scaricata dalla prima sezione è $= 5{,}1101$, dalla seconda 5,7331, dalla terza· 6,5925, dalla quarta 7,1391; onde avremo $q = 24{,}5749$, quantità maggiore di quel che importa l' oncia d'acqua milanese; ma se noi ristringeremo la larghezza 3 dell' oncia d' acqua milanese nella ragione di questa quantità d' acqua trovata a quella che è dovuta all' oncia d'acqua milanese, noi avremo compensato tutto l'errore, che dalla declività del letto nascea; facciasi dunque 24, 57 : 23,73 :: 3 : $\frac{7119}{2457} = 2{,}893 = L$.

Bocche rigurgitate.

86. Se il rigurgito fosse cagionato da un' acqua stagnante; esso sarebbe di facilissima supputazione. Sia BM l' altezza della bocca, AB il battente; e l' erogazione si faccia in un' acqua stagnante dell' altezza MX: è evidente che quest' acqua esteriore dell' altezza MX, farà equilibrio colla pressione di quell' acqua, interiore alla bocca, che si trova nella stessa altezza MX; dunque l'acqua da X fino in M non uscirà, che in vigore dell' altezza premente AX, e la velocità dell' acqua per tutto lo spazio XM, sarà da rappresentarsi per la costante XZ.

87. E chiamando $BX = a$; $AB = b$; $XM = c$ si avrà $q = \frac{2}{3}\left(\overline{b+a^2}^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right) + \overline{b+a^2}^{\frac{1}{2}} \cdot c$. Ora se nell' altezza MX l' acqua non fosse rigurgitata noi avressimo $q = \frac{2}{3}\left(\overline{b+a+c^2}^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right)$. Dunque il difetto cagionato dal rigurgito nella quantità d' acqua sarà $\frac{2}{3}\left(\overline{b+a+c^2}^{\frac{3}{2}} - \left[b+a\right]^{\frac{3}{2}}\right) - \left[b+a\right]^{\frac{1}{2}} \cdot c$

88. Ma d' ordinario il rigurgito non è generato da un' acqua ferma, bensì da un' acqua che si muove, e generalmente da quella stess' acqua ch' esce dalla bocca rigurgitata, e che in seguito ritardata dagli impedimenti, che si ritrovan nel cammino movesi più lenta dell' acqua che sgorga, e cresce perciò in maggiore altezza; quindi se il canal di derivazione non ha il suo fondo, che sia molto sotto al lembo inferior della bocca, fa contro l' acqua, che ne sgorga dalle parti inferiori, uno sforzo. Questo sforzo però che contro la bocca di derivazione si fa dall' acqua inferiore in moto non potrà mai uguagliare quello sforzo, che farebbe se fosse in quiete; In fatti si sa che l' urto tra solidi e solidi è, in parità di circostanze, proporzionale alla differenza delle loro velocità, e che tra fluidi e fluidi è proporzionale al quadrato della stessa differenza; ma la pression non differisce dall' urto non essendo quella, che un urto continuato. Dunque le sezioni inferiori d'una corrente non eserciteranno contro le sezioni superiori se non un urto,

ossia non vi opporranno altra resistenza se non proporzionale ; al quadrato della differenza tra la velocità delle superiori , e quella delle inferiori ; quindi par evidente che molto male si appongano quelli che non fanno distinzione tra l'acqua , che rigurgita in quiete , e quella che rigurgita in moto .

89. Affin di determinare il rigurgito anche in questi casi , che sono i più frequenti , si determini in prima per mezzo d'un esatta livellazione di quanto il pelo della corrente sormonti il lembo inferiore della bocca . Il pelo della corrente si deve prendere in poca distanza dalla bocca , cioè a dire la ove si vede terminato quell' ondeggiamento , che d'ordinario nasce vicino alle bocche d'erogazione ; e sia MX l' altezza con cui la corrente sormonta il lembo inferior della bocca . Si determini in secondo luogo la velocità dell' acqua rigurgitante nell' altezza MX . Se MX rispetto a tutta l' altezza della corrente sarà picciola cosa , la velocità in superfizie potrà riguardarsi comune a tutta MX ; altrimente converrà determinarla a varie profondità : qualunque sia l'altezza MX dicasi v la sua velocità media . In terzo luogo si cerchi la velocità media dell' acqua che sgorgherebbe da MX quando non si avesse alcun rigurgito , e questa velocità media si chiami V : ma intorno a ciò converrà distinguere due casi , cioè o MX è assai picciola rispetto a tutta l'altezza premente AM ; o non lo è . Cominciamo a supporre MX assai picciola : in questo caso noi potremo supporre , che il quadrato della velocità media sia eguale al medio tra i quadrati di tutte quelle velocità , che corrispondono ai varj punti tra X ed M ; e posto ciò noi potremo facilmente rinvenire il total della pressione che la corrente esercita contro l'acqua che sgorga da MX ; Imperciocchè chiamando V la velocità media , che avrebbe l' acqua se liberamente sgorgasse da XM ; v la velocità media delle parti superiori della corrente che rigurgitano ; p la pressione che l' acqua rigurgitante eserciterebbe ove fosse in quiete , se faremo

$V^2 : \overline{V - v}^2 :: p$ al quarto $= p \cdot \dfrac{\overline{V - v}^2}{V^2}$, questo quarto (num. 88) ci dinoterà quanto di pressione opponga l' acqua rigurgitante all' altezza MX della bocca .

90.

90. Che se MX non sarà tanto picciola in confronto di AX da potersi supporre, che il quadrato della velocità media uguagli il medio tra i diversi quadrati delle velocità dell' acqua, che liberamente sgorgherebbe da XM, allora per aver la resistenza dell' acqua rigurgitante si proceda col metodo seguente. Si descriva (Fig. 2) sul lato AM il triangolo AQM in cui la base QM ci dinoti la pression dell' acqua in M corrispondente all' altezza AM: condotte parallele a QM le ordinate FI, PL, XG, queste ne esprimeranno la pressione che soffre l'acqua ne' punti F, P, X, e per conseguenza i quadrati delle velocità di que' spilli d' acqua, che spiccierebbono dai punti F, P, X; quindi tutto il trapezio GXMQ, ci rappresenterà il piano de' quadrati delle velocità dell' acqua, che liberamente sgorgherebbe dalla sezione MX posta sotto l' altezza premente AX. Fatto ciò si determinino col mezzo dell' esperienza le varie velocità della corrente in tutta la profondità XM, che per ipotesi, è quella sola che rigurgita; e a questo fine si divida questa profondità in once XP, PF, FM; e si faccia esperienza in ciascuna di queste once; indi si trovi l'altezza che sarebbe necessaria per produrre quella velocità, che in ciascuna esperienza ritrovasi; e sia c l' altezza a cui sarebbe dovuta la velocità in XP; c' quella di PF, c'' quella di FM; onde se noi faremo AM : QM :: c : $\frac{c \cdot QM}{AM}$ questo quarto termine ci esprimerà il quadrato della velocità nella corrente in tutta la profondità XP; dico in tutta la profondità XP, perchè nelle acque correnti (eccettuate quelle parti che sono assai vicine al fondo) la velocità in piccioli intervalli si può suppor costante. Prendendo adunque sopra LP il segmento $Pp = \frac{c \cdot QM}{AM}$ e formato il parallelogrammo Xp, questo ne rappresenterà la somma de' quadrati delle velocità nella corrente in tutta l' altezza XP. Per la stessa ragione avremo $\frac{c' \cdot QM}{AM}$ eguale al quadrato della velocità in tutta l' altezza PF della corrente; e preso il segmento $Ff = \frac{c' \cdot QM}{AM}$ avremo il parallelogrammo Pf che ci rappresenterà i quadrati delle velocità nella corrente dell' altezza PF, e così $\frac{c'' \cdot QM}{AM}$ sarà il quadrato della velocità in FM; e

preso $Mm = \frac{c''.QM}{AM}$ avremo il rettangolo Fm; che ne esprimerà i quadrati delle velocità da F fino in m. Quindi se noi chiameremo V^2 il trapezio GXPL; V'^2 il trapezio LPFI; V''^2 IFMQ; ed v^2 il rettangolo Xp; v'^2 il rettangolo Pf; v''^2 il rettangolo Fm avremo (num. 89.) per il rigurgito cagionato nell' altezza XP l'espressione $p \cdot \frac{\overline{V^2 - v^2}}{V^2}$; in PF avremo $p \cdot \frac{\overline{V'^2 - v'^2}}{V'^2}$; in Fm $p \cdot \frac{\overline{V''^2 - v''^2}}{V''^2}$.

91. Di quì si vede, che il caso da noi esaminato nel numero antecedente comunque più complicato puossi ridurre al caso semplicissimo esaminato al num. 89.

92. Prendasi ad esempio l'oncia d' acqua milanese: sarà $BM = 4$; $AB = 2$, e sia $MX = \frac{1}{2}$; la velocità dell' acqua rigurgitante sia, in superfizie, quella che potrebbe esser generata sotto un' altezza premente $= 2$; e questa medesima velocità (per essere $MX = \frac{1}{2}$) si manterrà nell' acqua rigurgitante la stessa per tutta la profondità MX; per questa medesima ragione poi che è $MX = \frac{1}{2}$ si potrà supporre, che nella bocca d'erogazione BM, il quadrato della velocità media in FM sia il medio tra i quadrati di quelle velocità, che avrebbono gli spilli d' acqua, che dai diversi punti spicciano di FM, chiamando $AX = b$; $XM = a$, e la velocità media $= V$, noi avremo (num. 49.) $V = \frac{2}{3}\left(\frac{\overline{a + b^2}^{\frac{3}{2}} - \overline{b^2}^{\frac{3}{2}}}{a}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\overline{6^2}^{\frac{3}{2}} - \left(\overline{5\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\right)}{\frac{1}{2}}\right) =$ 2, 3977; la velocità dell' acqua rigurgitante che è v, sarà $= \sqrt{2} = 1, 4142$; onde $\overline{V^2 - v^2} = 0, 9673$; onde la resistenza dell' acqua rigurgitante $= \frac{p \cdot \overline{V^2 - v^2}}{V^2} = \frac{p \cdot 0, 9673}{5,749} = p \cdot 0, 1682$. Da ciò si vede, che nell' esempio proposto la resistenza dell' acqua rigurgitante è poco più d' un sesto di quello, che si avrebbe ove l' acqua rigurgitante fosse in quiete.

93. Per determinare poi quanto la resistenza trovata cagioni difetto nella quantità d'acqua, sull' asse AN (Fig. 6.) col parametro

$p = 1$ si descriva la parabola AZR; e presa AM = 6; AX = $5\frac{1}{2}$ si guidino le ordinate MP, XZ; indi si produca XA fino in A' per modo che sia XA : XA' :: 1 — o, 1682 : 1 :: 8318 : 10000; e col parametro $p' = o, 8318$. si descriva la parabola A'ZR'; questa dovrà tagliare in qualche punto Z (avendo un parametro minore) l'altra parabola AZR, il qual punto Z corrisponderà precisamente, per mezzo dell' ortogonale ZX all' assissa AX = $5\frac{1}{2}$; Imperocchè essendo l'ordinata ZX comune ad ambedue le parabole avremo p . XA = p' . XA'; onde $p : p' ::$ XA' : XA; ma $p : p' ::$ 10000 : 8318. Dunque anche XA' : XA :: 10000 : 8318. Ma prendendo XA = $5\frac{1}{2}$ è per costruzione XA' : XA :: 10000 : 8318; e questa proporzione non può aver luogo in verun altro punto X; dunque al punto Z dell' intersezione corrisponde l' assisa AX = $5\frac{1}{2}$. Supponghiamo pertanto, che l' acqua premente in luogo di giugnere soltanto in A ascenda fino in A'; ma che per contrario in luogo d' avere la sua solita gravità specifica g abbia una gravità specifica = g . o, 8318, noi avremo alla profondità X la stessa pressione, e quindi la stessa velocità tanto dall' acqua nell' altezza XA, quanto da quella nell' altezza XA'; la pressione poi per tutto lo spazio XM (nell' ipotesi della gravità specifica g . o, 8318) uguaglierebbe la differenza che passa tra la sua pression nell' ipotesi ordinaria sotto l' altezza AX, e la resistenza già calcolata dell' acqua rigurgitante. Dunque il piano delle velocità in XM, ossia la quantità d'acqua, che tramezzo al rigurgito sgorgherebbe da XM, sarebbe da esprimersi per il trapezio parabolico MXZP'; e la differenza che si avrebbe nella quantità d' acqua a cagion del rigurgito, sarebbe da esprimersi per il triangolo mistilineo ZPP', moltiplicato però per la larghezza della bocca.

94. Nelle già supposte dimensioni rintracciamo di questo triangolo mistilineo il valore. Essendo AX = $5\frac{1}{2}$; l' area parabolica AZX sarà = $\frac{2}{3}$. 12, 8987 : l'area APM = $\frac{2}{3}$. 14, 6970; onde XZPM = $\frac{2}{3}$. 1, 7983. Avendo poi fatto (num. 93.) XA' : XA :: 10000 : 8318 avremo XA' = 6, 6121; onde A'ZX = $\frac{2}{3}$. 15, 5067; avremo anche

A'M = 7, 1121, ed A'P'M = $\frac{2}{3}$. 17; 2980; ed XZP'M = $\frac{2}{3}$. 1, 7913; e quindi il triangolo mistilineo PZP' = $\frac{2}{3}$. 0, 007, che moltiplicato nella larghezza 3 della bocca fornisce di prodotto 0, 014, che sarà tutto il difetto cagionato dal rigurgito nella quantità relativa dell' oncia d' acqua milanese.

95. E non faccia meraviglia, che nel caso da noi preso qui sopra in considerazione il difetto nella quantità d' acqua siasi ritrovato tanto picciola cosa; Imperocchè supponghiamo, che l'acqua rigurgitante in luogo d' essere in moto fosse in quiete, nel qual caso il rigurgito avrebbe il suo valor massimo, qual finalmente sarebbe tutto il difetto da lui cagionato nella quantità d' acqua? Condotta da Z sopra MP la perpendicolare Z*p*, esso sarebbe il prodotto della larghezza 3 nel triangolo mistilineo *p* ZD, prodotto anch' esso, sicuramente assai picciolo; quanto più picciolo adunque non dovrà questo medesimo essere ove l' acqua rigurgitante abbia un movimento che cospira con quello dell' acqua che sgorga?

96. In fin a tanto adunque, che nell' acqua rigurgitante noi avremo un' altezza, che sia molto picciola per rispetto a quella, che preme nella bocca d' erogazione, il difetto che ne deriverà per l' erogazione essere non potrà che assai picciolo; al crescere però nell' acqua rigurgitante l' altezza, il difetto crescerà, e crescerà in una ragione assai maggiore di quel che cresca la detta altezza; Imperocchè, fatta l' altezza M*x* = 2 MX, il difetto nella quantità d'acqua crescerà nella ragione di *p* ZP : *qz* P. cioè ascenderà ad un valore molto maggiore non solo del duplo, ma molto maggior del triplo.

Fine del Supplemento.

SUPPLEMENTO SECONDO

DELL' INGEGNERE

CARLO PAREA.

PARTE PRIMA

Mentre era occupato nella soluzione di alcuni problemi draulici propostemi da miei colleghi, ed amici, mi nacque il pensiero di rintracciare qual forma aver dovesse n orificio di un vasto recipiente, affinchè esso smaltisca lelle quantità d'acqua proporzionali alle potenze delle alèzze, sia questo orificio lambente la superficie dell' acqua, od immerso sotto di essa ad una qualunque profondità. Per poi generalizzare di più il problema, ho cerata la forma di esso orificio nell' ipotesi che la quantità 'acqua sia proporzionale ad una funzione qualunque dell' ltezza dell' acqua sopra la sezione, supposto l' orificio ott' acqua a qualsivoglia profondità.

PROBLEMA I.

In un vasto recipiente si cerca qual forma dee darsi d un piccolo orificio, che coll' orlo superiore tocca la uperficie dell' acqua mantenuto costantemente a quell' ltezza, qual forma (dico) affinchè esso smaltisca delle uantità d'acqua, le quali siano in ragione di una potena qualunque n dell' altezza sopra una sezione indefinita ell' orificio.

Sol. Chiamata y la sezione orizzontale dell' orificio, l'ascissa corrispondente ossia l'altezza dell' acqua sopra sezione y; è noto che la quantità d' acqua tramandata all' elemento ydx dell' orificio viene espressa dalla quantità $ydx\sqrt{x}$, e quindi la quantità erogata dal segmento ndefinito dell' orificio dal principio fino alla sezione y ene rappresentata dall' integrale $\int ydx\sqrt{x}$, e questa per otesi del problema dovendo essere proporzionale ad

una potenza qualunque di x avremo (preso un coefficiente costante f) l'equazione $\int ydx \surd x = fx^n$. Dunque differenziando $ydx \surd x = nfx^{n-1}dx$, ovvero $y \surd x = nfx^{n-1}$, e quadrando si avrà $y^2 x = n^2 f^2 x^{2n-2}$, ovvero $y^2 = n^2 f^2 x^{2n-3}$, equazione della curva cercata, o della figura da darsi all' orificio.

Cor. I. Se $2n = 3$, ovvero $n = \frac{3}{2}$, allora risultando $y = nf$ si vede subito, che la figura dell' orificio è un rettangolo, che ha per larghezza nf, e per altezza quella che più piace.

Cor. II. Se $2n > 3$, ovvero $n > \frac{3}{2}$ la curva è sempre parabolica perchè in questo caso fatto $2n-3 = m$ l'equazione della curva è $y^2 = n^2 f^2 x^m$, che appartiene alla *famiglia* delle parabole, ed in questo caso le ordinate della parabola sono alla sua concavità, cioè le sezioni orizzontali dell' orifizio terminano alla parte concava tutte le volte che $2 > m$, ed all' opposto terminano alla parte convessa ogni volta che $2 < m$.

Cor. III. Se $2n < 3$, ovvero $n < \frac{3}{2}$ allora la figura dell' orificio è sempre iperbolica, poichè l'equazione $y^2 = n^2 f^2 x^{2n-3}$, ovvero $y^2 x^m = n^2 f^2$ (posto $2n - 3 = -m$) è l'equazione ad una curva della *famiglia* delle iperbole equilatere fra gli asintoti.

Cor. IV. Vogliasi ora ritrovare la figura della piccola luce di un ampio recipiente, mantenuto costantemente pieno sino all' orlo superiore della luce, la quale tramandi delle quantità d'acqua, che sieno proporzionali alle altezze dell' acqua sopra la sezione indeterminata della luce, dove si concepisce, che cessi lo sgorgo.

L'integrale $\int ydx \surd x$ esprime la quantità d'acqua tramandata dall'elemento ydx della luce come si è detto. Ora dovendo essere questa quantità d'acqua proporzionale all'al-

tezza x sopra la falda inferiore; ne viene, che pigliando λ per un coefficiente costante avremo l'equazione $\int ydx \surd x = \lambda x$. Dunque differenziando sarà $ydx \surd x = \lambda dx$, cioè $y \surd x = \lambda$, e quadrando $y^2 x = \lambda^2$. Questa è l'equazione dell' iperbola cubica equilatera fra gli asintoti, nella quale i quadrati delle ordinate sono in ragione reciproca delle ascisse corrispondenti. Dunque la luce cercata è l'iperbola cubica equilatera riferita agli asintoti mediante l'equazione, nella quale il quadrato dell' ordinata moltiplicato per l'ascissa è sempre lo stesso. Il che ec.

PROBLEMA PIU' GENERALE DEL PRECEDENTE.

Suppongasi che l'orlo dell' orificio verticale non sia a fior d'acqua, ma immerso nell' acqua alla profondità a, e si cerchi anche in quest' ipotesi la figura dell' orificio, che smaltisce delle quantità d'acqua proporzionali alla potenza n delle altezze sopra la sezione indefinita dell' orificio.

Sol. È evidente che quì avremo $\int ydx \surd (a+x) = f.(a+x)^n$, e differenziando $ydx \surd (a+x) = nf(a+x)^{n-1}dx$, ovvero $y \surd (a+x) = nf.(a+x)^{n-1}$. Quindi quadrando, poi dividendo per $a+x$ si trova l'equazione $y^2 = n^2 f^2 (a+x)^{2n-3}$ per la figura dell' orificio. Il che era ec.

Cor. È cosa per se manifesta, che in quest' equazione hanno luogo gli stessi riflessi, e teoremi, che sono stati indicati ne' Corollarj del Problema precedente col solo divario, che quì la figura dell' orificio resta mutilata, o diminuita di quel segmento dall' alto al basso, che ha per altezza verticale a, ossia l'altezza dell' acqua sopra il margine superiore del detto orificio.

Finalmente la massima generalità di cui è suscettibile il Problema analogo ai precedenti si riduce alla seguente.

Si vuol sapere la forma dell' orificio verticale praticato in un ampio recipiente mantenuto sempre pieno d'acqua, affinchè le quantità d'acqua erogate per questo orificio sieno in proporzione di una funzione qualunque dell' altezza dell' acqua sopra la sezione inferiore indefinita di esso orificio, supposto che l'orlo superiore del medesimo si trovi sott' acqua a qualunque profondità.

Sol. Si chiami a la profondità dell' orlo dell' orificio sotto il livello dell' acqua, ed $a+x$ sarà l'altezza dell' acqua sopra la sezione indefinita y. Dicasi P la funzione qualunque di $a+x$, e sia $dP = P'dx$ esprimendo P' la quantità che moltiplica dx nel differenziale dP. Ciò posto abbiamo $\int y dx \surd(a+x) = f P'$ preso per f un coefficiente costante, e differenziando sarà $y dx \surd(a+x) = f P'dx$ cioè $y \surd(a+x) = f P'$. Se ora si piglia il quadrato di quest' equazione, indi si divide per $a+x$, si ottiene $y^2 = \frac{f^2 P'^2}{a+x}$, che è l'equazione, la quale rappresenta la figura dell' orificio, e quest' equazione è sempre algebraica qualora $\frac{P'^2}{a+x}$ è una funzione algebraica di $a+x$, e trascendente quando $\frac{P'^2}{a+x}$ è una funzione trascendente di $a+x$. Il che era ec.

Scolio. Può talvolta accadere che essendo P una funzione trascendente di $a+x$, la sua derivata P' risulti contro ogni aspettazione affatto algebraica, ed allora la curva dell' orificio, che ogni apparenza faceva credere dovesse essere trascendente scoprisi essere algebraica o geometrica. Eccone un memorabile

ESEMPIO

Suppongo che le quantità d'acqua smaltite dall' orificio sieno come i logaritmi delle altezze. Avremo pertanto $\int y dx \surd(a+x) = f \log.(a+x)$, e differenziando, e dividendo per dx si ha $y \surd(a+x) = \frac{f}{a+x}$. Fatto ora il quadrato dell' uno, e dell' altro membro di quest' equazione, e diviso il tutto per $a+x$, nasce in fine $y^2 = \frac{f^2}{(a+x)^3}$ equazione algebraica dell' iperbole equilatera di quinto grado fra gli asintoti.

ESEMPIO II.

Si faccia la supposizione, che le quantità d'acqua tramandate dalla luce del recipiente stiano fra loro come gli archi circolari, che hanno per tangente le altezze dell' acqua sopra la sezione indefinita, dove si vuole, che termini l'efflusso, e per raggio l'unità.

Sol. Posto a l'altezza dell' acqua sopra l'orlo superiore della luce abbiamo $\int y dx \surd x = f.$ Arc. tang. $(a+x)$ E siccome è noto dal calcolo differenziale, che il differenziale di un arco circolare descritto col raggio 1., ovvero il differenziale di un angolo, è eguale al differenziale della sua tangente, diviso per la somma de' quadrati del raggio, e della tangente stessa; quindi sarà $f\, d.$ Arc. tang. $(a+x) = \frac{f\, dx}{1+(a+x)^2}$; e perciò $y dx \surd x = \frac{f\, dx}{1+(a+x)_2}$. Perlocchè dividendo per dx, indi quadrando avremo $y^2 x = \frac{f^2}{[1+(a+x)^2]^2}$, la qual espressione pone sott' occhio, che la figura della luce è una curva algebraica di settimo grado.

PARTE SECONDA

Sulle Tavole poste in fine dell' Opera.

Se vi ha una scienza, in cui richieggasi la più scrupolosa esattezza nel calcolo, ella è certamente quella delle acque, poichè non potendosi in essa sottopporre al calcolo alcune piccole circostanze che alterano lo stato delle cose, se ommettesi anche la precisione del conteggio, ci troviamo a dei risultati così distanti dal vero, che ci fanno commettere nell' uso pratico gli errori più grossolani. Non è che il N. A. non conoscesse questa verità, essendo egli troppo avveduto e profondo, ma la brevità del tempo, in cui fu obbligato a dar alla luce la sua Opera, non gli ha permesso di formare la Tavola con più ciffre decimali, ed in conseguenza alcuni conteggi restarono inesatti. Col parere adunque dello stesso autore da molti anni erasi disposto la Tavola delle Radici, e prodotti con sei ciffre decimali per uso particolare, ma fatto riflesso che cinque potevano bastare, ritenuta la quinta ciffra maggiore di una unità, qualora l'altra successiva oltrepassasse il cinque, si è creduto bene di porre in fine dell' opera una Tavola dall' uno fino a duemille solamente con cinque ciffre, siccome quelle che si riconoscono sufficienti nell' uso pratico.

Per essere convinti che bastano cinque ciffre decimali prendasi l'oncia d'acqua milanese: l' altezza totale è 6 la cui radice è 2,44949, il suo battente è 2, la cui radice è 1,41421, onde la quantità relativa d'acqua, come c'insegna il N. A. risulta 2,73702, ora se la radice

di 6, come anche la radice di qualsivoglia altro numero più, o meno elevato si produrrà ad un numero di ciffre decimali anche infinito, non potrà mai aversi una differenza, che sia maggiore di 0,000005; suppongo anche, che la radice di 2, o di qualsivoglia altro battente più, o meno elevato abbia ricevuto un incremento più del dovere, e che sia esso pure il massimo, cioè 0,000005: diventando nel calcolo delle quantità d'acqua il battente un valor negativo, si avrà il caso, che tra tutti i possibili, secondo il metodo dell'oncia d'acqua milanese, sarà il più svantaggioso; ciò non ostante la quantità relativa d'acqua, che in questo caso risulta per l'oncia milanese è 23,737119; onde si avrà la quantità relativa d'acqua nell'oncia milanese calcolata con cinque ciffre decimali alla quantità relativa calcolata nella supposizione tra tutte le possibili la più svantaggiosa con un numero di ciffre decimali anche infinito, come 23,73702 : 23,737119 :: 1 : 1,000004, e la massima quantità, che in tutti i casi possibili si può trascurare, risulterebbe di quattro milionesimi d'oncia. Il prezzo dell'oncia d'acqua milanese è di circa lire ventiquattromille, sarà dunque il valor trascurato di soldi due al più. Che se in luogo di calcolare, come si è fatto, le dimensioni dell'oncia d'acqua milanese, si volessero prendere dimensioni assai più vaste, è vero, che il valor assoluto, che si trascurerebbe riuscirebbe molto maggiore, di maniera che, se si calcolassero migliaja, e milioni d'once d'acqua, s'avrebbero differenze di migliaja, e milioni di soldi, ma questi, sebbene presi isolatamente formino un valor ragguardevole, sarebbero però ancora nella totalità trascurabili, poichè siccome son trascurabili due soldi rispetto a mille doppie, così son trascurabili quattro soldi rispetto a due mille doppie, ed in qualunque ipotesi non è l'assoluta

quantità trascurata, ma la relativa che si ha di mira. Quindi si vede, che nel ricevere una moneta d'oro, per esempio una doppia, si trascura il diffetto di un grano, nel ricevere mille, o due mille doppie si trascura egualmente il difetto di mille, o due mille grani, che sebbene presi questi isolatamente, e come una quantità assoluta formino un valore non affatto dispregevole, sono però trascurabili in relazione della totalità di mille, o due mille doppie. Ma se in mille, o due mille doppie si trascurano in pratica mille, o due mille grani d'oro, non sarebbe una sordidezza al di là d'ogni limite il voler nell'oncia d'acqua milanese, il cui valore è di mille doppie tener conto rigoroso di quell'acqua, che può valere al più due soldi?

Si potrebbe opporre, che quando la luce avesse un'altezza estremamente piccola, ed un battente estremamente grande, la quantità trascurata colla tavola a cinque decimali, non è dispregevole rispetto alla totalità. Ma si avverte in primo luogo, che tali non sono le bocche destinate all'irrigazione de' terreni, e che di queste solo si è parlato, ed in secondo luogo è noto a ciascun Idraulico, che nel calcolare l'acqua sgorgante da picciole luci sotto enorme battente non si fa uso de' trapezj parabolici, ma con operazione più spedita si prende il prodotto dell'area del forame nella radice dell'altezza premente, ed in questo caso le quantità, che si trascurano diventano tanto minori, quant'è minore l'altezza della luce, e quanto è maggiore quella del battente.

Sembrerà forse a taluno, che più del bisogno siasi ragionato sulla proposta tavola a cinque decimali, ma si credette convenire una più abbondante dimostrazione a motivo che, alcuni mesi sono, apparve alla luce un manifesto in cui si vorrebbe far credere al pubblico, che

nella Tavola parabolica cinque ciffre decimali non bastino, ma che ne abbisognino precisamente quindici: l'autore di questo manifesto uomo chiaro pei di lui talenti in questa materia, già da più anni s'impiega diffatti nella costruzione di una tavola a quindici ciffre, e ci fa sperare di poterla non ostante l'avvanzata sua età, e vacilante salute ridurre finalmente a termine. Lodevole certamente è questa di lui laboriosa intrapresa, ma credesi che non riescirà discara al pubblico la nostra tavola, come che abbia esatta una minor fatica, se come si è superiormente dimostrato le cinque ciffre non solo bastano, ma sono anche esuberanti al bisogno per chiunque nel regolamento delle acque si è prefissa una lodevole economia, e non una sordida tenacità.

Di questa verità persuaso intimamente il Chiarissimo Autore del primo supplemento; sebbene nel comporlo avesse a sua disposizione la tavola a cinque ciffre decimali, non se n'è pure voluto servire, dicendo che egli calcolando per le persone discrete, s'accontentava di tre o quattro, e per le persone di soverchia tenacità erasi fatto abbastanza col dare in mano a periti la tavola a cinque ciffre, colla quale poteva ciascuno rinnovare da se stesso i calcoli.

La seconda tavola che si è posta in fine dell' opera, la quale contiene le radici, e prodotti successivi principiando da un punto del braccio milanese, e proseguendo a punto per punto sino all' altezza di trenta once, serve unicamente a risparmio di tempo nell' uso pratico, e per evitare la moltiplica, o divisione del numero 498,83 inserviente a ridurre li punti cubici d'acqua in once cubiche, e viceversa come parla il N. A. al cap. VII.

Si è creduto bene di arrestarsi nella tavola stessa alle once trenta, giacchè quando l'altezza dell' acqua di

cui se ne vuol calcolare la quantità è maggiore di once trenta, ben difficilmente si può tener conto della differenza de' punti: il comodo poi di avere le radici successive, e prodotti di parti duodecimali, in cui sono divise quasi tutte le unità di misura da noi praticate, ci fu spinta a presentarla al pubblico, quantunque coll' accennato metodo indicato dal N. A., ciascuno può ridurre le once cubiche in punti cubici, e viceversa senza bisogno di questa tavola.

L'uso pratico della misura dell' acque col metodo milanese, ha fatto nascere il pensiere di compilare la terza tavola di rapporto posta in fine dell' opera. Essa contiene due colonne, la prima delle quali a sinistra indica l'altezza d'acqua premente, ossia il battente di una luce regolare di once quattro, il quale va scemando gradatamente a punto per punto, sino a che è ridotta la luce senza battente, la stessa colonna marca in seguito l'altezza d'acqua viva, che egualmente come il battente diminuisce gradatamente di un punto sino alla totale estinzione della luce. L'altra colonna ci somministra delle frazioni con cinque ciffre decimali, le quali servendo di moltiplicatore alla quantità d'acqua di un modulo, ossia modello qualunque milanese supposto, che abbia compita sì la luce, che il battente, dà per prodotto la vera quantità d'acqua, che si eroga dallo stesso modello mancante o di battente, od anche di luce libera come viene indicato dalla prima colonna.

Vogliasi sapere per esempio la quantità d'acqua, che darà un modello milanese di once sei supponendo, che allo stesso manchi un' oncia e mezza di battente; egli è evidente, che la luce libera avrà una mezz' oncia di battente. Cercansi dunque nella prima colonna delle altezze del battente li punti sei, a' quali corrisponde nella se-

conda colonna la frazione 0,77452. Si moltiplichi la quantità d'acqua del modello, che è once sei per detta frazione, ed il prodotto di once 4,64712, ossia once 4 punti 7 atomi 9 circa, sarà la quantità d'acqua cercata. Egualmente se lo stesso modello di once sei oltre all'esser mancante del battente, avrà la luce libera d'altezza once tre, e punti dieci, si troverà nella seconda colonna la frazione 0,63236 corrispondente all'altezza della luce di once tre, e punti dieci, la quale moltiplicata per once sei darà per prodotto la quantità cercata di once 3,79416, ossieno once 3, punti 9, atomi 6. È inutile di quì avvertire, che l'acqua quantunque mancante di battente, od anche di luce libera deve esser priva di velocità in superficie, avendo su di ciò sufficientemente parlato il N. A. al cap. VII.

Può anche la presente tavola sciogliere nell'uso pratico alcuni quesiti, che teoricamente presentano qualche difficoltà, come sarebbe, se si volesse sapere di quanto dovrebbe scemarsi il battente, od anche la luce libera di un modello qualunque milanese, affinchè esso smaltisse una data parte aliquota della totale portata dal modello stesso. Una tale questione espressa algebraicamente importerebbe nel caso, che il modello avesse tutta la luce, ed avesse a minorarsi soltanto il battente un' equazione completa di quarto grado. Questa tavola risolve con facilità la questione; infatti, vogliasi che l'acqua di un modello, per esempio, di once quattro si diminuisca di un quinto, e che in conseguenza la quantità erogata sia quattro quinti del totale, cioè 0,80000, cerchisi nella seconda colonna la frazione, che più prossimamente esprima quattro quinti, che sarà 0,80354, alla quale corrisponde nella prima colonna l'altezza del battente di punti otto, e questa sarà l'altezza del battente, affinchè il proposto mo-

dello somministri li quattro quinti d' acqua della totale portata di esso. Infatti se si moltiplica detta frazione per la quantità d'acqua del modulo, si otterrà per prodotto li quattro quinti del total corpo come si è già superiormente dimostrato; siccome però la detta frazione è alquanto maggiore de' quattro quinti, volendosi precisamente l'altezza con de' decimali, si formerà la differenza di detta frazione, 80354 colla prossima minore 0,78921, la quale è ,01433, indi l'altra differenza della frazione 0,80000 esprimente i due quinti, colla nominata frazione minore 0,78921, che sarà ,01079, e facendosi la proporzione se la differenza di 0,01433 importa l'altezza di un punto, la differenza 0,01079 cosa importerà? il quarto termine sarà la frazione che deve aggiungersi ai punti sette, cioè, 75366 cento millesime parti di un punto, o prossimamente l' altezza del battente sarà di punti sette, e tre quarti.

Si è creduto poi di aggiungere in fine di quest' opera le tavole de' rapporti lineari tratte dal libro intitolato: *Istruzione su le misure, e sui pesi*, compilato da persone espertissime in tal materia, e pubblicate per ordine governativo, per la molta connessione che v'ha tra esse, ed il soggetto di quest' opera. A maggiore soddisfazione di coloro che non possedono il libro stesso, credo di riportare alcune notizie tratte dallo stesso per il più facile uso delle medesime tavole.

Le tavole, come si vede, oltre il nome di ciascun paese, misure, e principali loro divisioni, contengono due colonne de' numeri una intitolata braccio, che chiameremo *prima colonna*, l'altra metro, che diremo *seconda colonna*. Quella contiene la misura del dato paese espressa in parti del metro, questa il metro espresso nella misura del rispettivo paese.

1. Per ridurre una quantità di braccio, o piedi di un dato paese in metri, si moltiplicherà il numero corrispondente della prima colonna pel numero de' braccia proposti.

2. Volendo ridurre un dato numero di metri in braccia di qualche paese si moltiplichi il numero corrispondente della seconda colonna per li metri proposti.

3. Se poi si volesse ridurre una quantità di braccia di un paese in braccia di un altro, si ridurranno i primi in metri colla regola del §. 1, indi i metri nella misura dell' altro paese colla regola del §. 2.

Eccone tre esempj.

1. Braccia 121 di Milano quanti metri fanno?

Siccome il braccio di Milano è prossimamente di metri 0,595, moltiplicando dunque 121 in 0,595, il prodotto sarà metri 71,995, onde braccia 121 di milano faranno metri 71,995, o prossimamente metri 72.

2. Metri $12\frac{1}{2}$, quanti piedi sono del trabucco milanese?

Il metro è piedi del trabucco 2,297, ommettendo per brevità le altre quattro ciffre decimali; il prodotto dei metri $12\frac{1}{2}$ per 2,297, è 28,712; dunque metri $12\frac{1}{2}$ saranno piedi del trabucco milanesi 28, once $8\frac{1}{2}$, ossiano trabucchi 4, piedi quattro, once otto e mezzo.

3. Piedi agrimensori 100 di Cesena, quanti piedi di Pavia fanno?

Colla regola del primo esempio si trova, che 100 piedi di Cesena sono metri 53, 8, infatti moltiplicando 0, 538 in 100 si ottiene per prodotto 53, 8. Essendo poi il metro di piedi pavesi 2,118 prossimamente colla regola del secondo esempio si trova, che metri 53,8 fanno piedi di Pavia 113,9484, o prossimameute cento quattordici piedi, onde cento piedi di Cesena saranno cento quattordici piedi di Pavia.

METODO

Per la soluzione delle questioni relative all' uso delle acque, specialmente nelle irrigazioni de' fondi regolate sugli orarj.

§. 1. Giacchè dal N. A. si è accennato il modo di ripartire le acque per gli adacquamenti de' fondi; si crede conveniente di riportare una formola generale, col mezzo della quale ottenere facilmente la soluzione di tutti i casi che possono accadere relativamente alle competenze degli utenti di roggie per l' uso delle acque regolate sugli orarj.

§. 2. Questa competenza non può, che equivalere all' uso di una determinata quantità d'acqua d'un flusso equabile, e continuo, la quale riconosce per unità di misura la così detta *oncia*, *o quadretto* modellata secondo il costume dei diversi Distretti, e Comuni della Repubblica.

§. 3. Accadendo però di frequente, che lo stesso corpo d' acqua perenne scorra in un dato periodo di tempo a favore di più particolari, che chiamansi *utenti*, è facile di vedere, che la somma della quantità d' acqua, che ciascun utente ha goduto interpolatamente nel determinato periodo deve eguagliarsi al totale quantitativo d'once d'acqua, che ne costituisce il corpo intiero, nel modo stesso, come se un utente solo avesse usato nel menzionato periodo continuamente di tutta l' acqua: quindi ne viene, che la quantità interpolata rispettiva di ciascun utente deve pure equivalere ad una corrispondente parte d'acqua continua del corpo intero decorso nello stesso periodo, che ne forma la vera competenza.

§. 4. Ciò posto è manifesto, che tale competenza, ossia quantità d' acqua continua così ridotta dallo stato d' interpolazione risulta dai tre seguenti elementi:

1. Dal numero delle once d' acqua che costituiscono il corpo di essa, o la portata di una roggia.

2. Dalla ruota, che è una continua successione di eguali periodi di tempo suddiviso in parti proprie a' differenti utenti.

3. Dall' orario, che è una delle suddette parti della ruota.

§. 5. Poichè adunque una quantità d'acqua interporlata non è che il flusso equabile della medesima per un determinato orario, oltre il quale resta sospeso questo flusso fino al compimento della ruota, ben tosto si comprende, che tale quantità d'acqua ridotta ad uno stato di continuità, sarà in ragione diretta composta dell'intiero corpo d'acqua della roggia che si usa, e dell'orario, e nella reciproca della ruota. Imperciocchè è manifesto, che quanto maggiore sarà la portata di quella roggia, della quale ci serviamo per l'inaffiamento delle terre, o per qualsivoglia altr' uso, altrettanto maggiore sarà la quantità d'acqua, di cui godiamo, e parimenti questa quantità sarà maggiore secondo il numero de' giorni, o d'ore in cui possiamo di quella usare; per contrario quanto maggiore sarà il tempo della ruota, tanto minore sarà la quantità d'acqua nello stesso orario.

§. 6. Se pertanto si chiama R la ruota, T l'orario, N il numero delle once d'acqua, Q la quantità di essa equivalente all'interpolata, ossia la competenza avremo $Q = \frac{NT}{R}$ equazione, che sebbene semplicissima, pure ci conduce alla soluzione di tutti i casi anche più complicati per regolare l'uso interpolato delle acque di derivazione.

ESEMPIO I.

Un utente che ha il diritto di once 6 d'acqua per giorni 6 in ruota di giorni 15, la vuole trasformare in un' acqua perpetua, quante once potrà egli pretendere?

Poichè abbiamo $N = 6$. $T = 6$. ed $R = 15$. sarà $Q = \frac{6 \times 6}{15} = 2\frac{2}{5}$; potrà dunque questo utente pretendere l'uso continuo d'once $2\frac{2}{5}$ d'acqua.

ESEMPIO II.

Si assegna ad un utente una competenza equivalente ad once $3\frac{3}{5}$ di acqua continua, e gli si concede l'uso di una roggia della portata di once 12 d'acqua con un orario di giorni $4\frac{1}{5}$, quale ne sarà la corrispondente ruota?

Dell' equazione $Q = \frac{NT}{R}$ si ha $R = \frac{NT}{Q}$, in cui sostituiti i valori numerici si avrà $R = \frac{12 \times 4\frac{1}{3}}{3\frac{3}{3}} = \frac{252}{18} = 14$. Perchè adunque quest' utente abbia ad avere la succennata competenza dovrà godere il corpo d' acqua nell' indicato orario in ruota di giorni 14.

ESEMPIO III.

E' in diritto un utente di usare continuamente la quantità di once $\frac{4}{4}$ d'acqua, e vorrebbe far cambio con un altro utente, il quale gode once 20 di acqua in ruota di giorni 15: quale orario si competerà al primo utente?

Fatto $Q = 4$, $N = 20$, $R = 15$, e sostituiti nella formola i rispettivi valori sarà $4 = \frac{20T}{15}$, e quindi $T = \frac{4 \times 15}{20} = 3$. L'orario addimandato sarà di giorni 3 in ruota di giorni 15.

§. 8. Quando si volessero confrontare le competenze di due utenti, ossiano le loro rispettive quantità d'acqua ridotte, od equivalenti, si chiameranno per ordine q, n, t, r la nuova ridotta equivalente quantità d' acqua, il numero delle once del corpo della medesima, il tempo dell' uso od orario, e la ruota. Per le surriferite ragioni dovendo essere $q = \frac{nt}{r}$ sarà $Q : q = \frac{NT}{R} : \frac{nt}{r}$

ESEMPIO I.

Un utente A gode once 6 d'acqua per giorni 6 in ruota di giorni 15: ad un altro utente B abbisogna una competenza, od una ridotta quantità d'acqua quadrupla di quella di A, ma vorrebbe godere la nuova quantità d'acqua per giorni 5 continui in ruota di giorni 12: quale dovrebbe essere il corpo d'acqua conveniente?

Sostituiti nella suddetta analogia i corrispondenti valori sarà $1 : 4 = \frac{6 \times 6}{15} : \frac{5n}{12} = \frac{12}{5} : \frac{5n}{12}$ ossia $1 : 4 = 144 : 25n$; dal che risulta $n = \frac{4 \times 144}{25} = 23\frac{1}{25}$. Il corpo d'acqua competente sarà dunque di once $23\frac{1}{25}$.

ESEMPIO II.

Un utente a cui competendo once 7 d'acqua per giorni 6 $\frac{1}{2}$ in ruota di giorni 15 vorrebbe cambiarla con un altro corpo d'acqua di once 10 in ruota di giorni 14: quale sarà il suo orario?

Poichè l'acqua equivalente dopo il cambio deve eguagliare quella, che si godeva da prima; così nella suddetta analogia avremo $Q = q$, e però $\frac{NT}{R} = \frac{nt}{r}$; nella quale equazione sostituiti i valori proposti, si avrà $\frac{7 \times 6\frac{1}{2}}{15} = \frac{10\,t}{14}$; d'onde si ha $t = \frac{7 \times 6\frac{1}{2} \times 14}{15 \times 10} = \frac{637}{150} = 4{,}247$ prossimamente, ossieno giorni 4, ore 5, minuti 55.

ESEMPIO III.

Vi sono tre utenti di una roggia della portata di un corpo d'acqua di once 20, che scorre in ruota di giorni 12, il primo di essi ne ha giorni 6, il secondo giorni 4 ed il terzo giorni 2. Questi ultimi introducono nella roggia altre once 8 d'acqua su cui hanno ugual diritto, vorrebbero, che la ruota invece di giorni 12 fosse di giorni 14; e che il primo addattandosi a questa ruota venga escluso dal beneficio della maggiore quantità d'acqua introdotta, senza pregiudicare alla sua primiera competenza. Quale sarà l'orario rispettivo de' tre utenti nella ruota di giorni 14?

Giacchè la competenza del primo utente prima dell'introduzione delle once 8 d'acqua deve eguagliarsi a quella dopo l'introduzione; dovrà essere $\frac{20 \times 6}{12} = \frac{28T}{14}$ quindi $T = \frac{20 \times 6 \times 14}{12 \times 28} = 5$. Dunque il primo utente, il quale non deve partecipare del beneficio della nuova introduzione godrà le once 28 d'acqua in ruota di giorni 14 per giorni 5.

Per avere l'orario del secondo; ritenuto, che le once 8 d'acqua introdotta spettano per metà col terzo utente, conviene eguagliare la prima competenza unitamente alle once 4 d'acqua di sua ragione, a quella che va ad assumere colle nuove modificazioni convenute, e facendo

cendo $\frac{4 \times 20}{12} + 4 = \frac{28\,T}{14}$ ossia $\frac{32}{3} = 2\,T$: quindi $T = 5\frac{1}{3}$, e però spetteranno a questo secondo utente giorni $5\frac{1}{3}$ di orario nella ruota di giorni 14.

Nell' egual modo si avrà l' orario del terzo utente facendo $\frac{2 \times 20}{12} + 4 = \frac{28T}{14}$; equazione da cui si ha $T = 3\frac{2}{3}$; che sono i giorni d'orario competente a questo terzo utente.

Riunendo pertanto i rispettivi orarj si trova che al primo utente spetta l'orario di giorni . . . . . N.° 5.

al secondo . . . . . „ $5.\frac{1}{3}$

al terzo . . . . . „ $3.\frac{2}{3}$

la cui somma di giorni . . . . . N.° 14.

forma appunto la nuova ruota addimandata.

ESEMPIO IV.

Due utenti in parità di circostanze hanno un' eguale competenza. La quantità d'acqua del primo è di once 6 coll' orario di giorni 4 in ruota di quel tempo, che serve per orario del secondo, il quale gode una quantità d'acqua d'once 10 ogni giorni 15. Si addimanda quale sarà la ruota del primo utente, ed in conseguenza l'orario del secondo?

Giacchè le competenze o le quantità d'acqua ridotte sono eguali essendo $\frac{TN}{R} = \frac{tn}{r}$ fatto R e t ciascuno $= x$ sarà $\frac{TN}{x} = \frac{nx}{r}$ ed $x = \sqrt{TN \cdot \frac{r}{n}}$; equazione in cui sostituiti i valori di $T = 4$, $N = 6$, $r = 15$, $n = 10$ si avrà $x = \sqrt{\left(\frac{24 \times 15}{10}\right)} = 6$. Dunque tanto la ruota del primo, quanto l'orario del secondo sarà di giorni 6.

ESEMPIO V.

Servesi un utente di una roggia della portata di once 12 per giorni 5 $\frac{1}{2}$ continui in ruota di giorni 14; si conviene di sostituirgli due estrazioni separate, le quali senza alterare la primiera competenza somministrino la prima una quantità d'acqua per giorni 4 continui in ruota di giorni 12; e la seconda un' altra quantità eguale a quella della prima estrazione in ruota di giorni 15 per un orario di tanti giorni quanto lo indica il numero delle once della suddetta quantità. Quale sarà questa quantità d'acqua, e l'orario della seconda estrazione?

Siccome in questo caso la somma delle competenze dell'una e dell'altra estrazione si deve eguagliare alla competenza primiera, così sostituiti i valori alle lettere cognite della nostra formola si avrà $\frac{4N}{12} + \frac{N^2}{15} = \frac{5\frac{1}{2} \times 12}{14}$ dalla quale equazione si ha $N = \pm \sqrt{\left(\frac{25}{4} + \frac{495}{7}\right)} - \frac{5}{2} = 6{,}273$. Dunque tanto la prima, che la seconda estrazione somministreranno once 6,273 d'acqua, e l'orario della seconda sarà di giorni 6, ore 6, minuti 33.

Qualora poi il numero delle once N della prima estrazione invece di avere un rapporto di eguaglianza coll'orario, avesse tutt'altro conosciuto rapporto di $m : n$, in tal caso l'equazione da sciogliersi sarebbe $\frac{n}{m}\frac{N^2}{15} + \frac{N}{3} = \frac{12 \times 5\frac{1}{2}}{14}$.

§. 8. L'uso poi dell'accennata formola $Q = \frac{NT}{R}$, quando in essa facciasi entrare l'elemento del prezzo, può estendersi anche ai casi in cui il valore sia della competenza, sia dell'acqua interpolata può avervi luogo, come di frequente accade nelle contrattazioni delle acque regolate sugli orarj. Se adunque P esprimerà questo prezzo, egli è manifesto, che moltiplicandosi l'un membro e l'altro della superiore equazione per P, essa sussisterà, ed avremo $PQ = PN \cdot \frac{T}{R}$ in

cui PQ esprimerà il valore della competenza, o dell' acqua perenne equivalente, o ridotta; e $PN.\frac{T}{R}$ quello di tutto il corpo diminuito nella ragione dell' orario, e della ruota cioè di $\frac{T}{R}$, ossia rappresenterà il vero valore dell' acqua interpolata. Pertanto se si chiami U il suddetto valore si avrà $PQ = U$, e quindi $U = PN.\frac{T}{R}$.

ESEMPIO I.

Un proprietario affitta l'uso di una roggia d' once 9 d'acqua per giorni 4 continui in ruota di giorni 12 al prezzo di lir. 1200 all'oncia, quale sarà l'importo dell' affitto?

Fatta la sostituzione de' valori alla suddetta equazione, si avrà $U = \frac{9 \times 4 \times 1200}{12} = 3600$, che sarà l'addimandato importo dell' affitto.

ESEMPIO II.

Un utente ha speso lir. 3000 per avere giorni 3 successivi d'acqua in ruota di giorni 12, il cui prezzo all' oncia fu valutato lir. 1200. Quante once d'acqua ha avuto in affitto?

Dalla nostra formola $U = \frac{NTP}{R}$ si ha $N = \frac{UR}{TP}$, quindi fatte le debite sostituzioni, $N = \frac{3000 \times 12}{3 \times 1200} = 10$.

ESEMPIO III.

Si pagano lir. 3000 per l'affitto di una roggia d'once 10 d'acqua, che scorre per giorni 4 continui nella ruota di giorni 15, a quanto ascenderà il fitto di un' oncia d'acqua continua?

Dall' equazione $P = \frac{RU}{NT}$, desunta dalla suddetta formola fatte le sostituzioni numeriche si ottiene $P = 1125$.

ESEMPIO IV.

Per l'uso di once 8 d'acqua nell'orario di giorni 6, pagasi la somma annuale di lire 4800, regolata sul prezzo di lire 1200 all'oncia; qnale sarà la corrispondente ruota?

Dalla formola $U = \frac{NTP}{R}$ si ha $R = \frac{NTP}{U}$: a cui sostituiti i sopraccennati valori si avrà $R = \frac{8 \times 6 \times 1200}{4800} = 12$. Quindi la ruota addimandata sarà di giorni 12.

ESEMPIO V.

Consta che la competenza di A, per la quale paga annualmente il fitto di lir. 6000, è $\frac{3}{5}$ di quella di B: gode A la sua quantità di acqua per giorni 4 continui in ruota di giorni 12; ed è la competenza di B una quantità d'acqua eguale a quella di A, che scorre continuamente per giorni 6 in ruota di giorni 14 oltre once 2 di acqua perenne. Quale sarà la quantità d'acqua di B e di A ed il prezzo all'oncia di quest'ultimo?

Sostituite alle lettere cognite della formola $U = \frac{NTP}{R}$ i rispettivi valori si ha $6000 = \frac{4NP}{12}$ e $PN = 18000$. Ora constando, che la competenza di A è a quella di B $= : : 3 : 5$ sarà ancora $\frac{4N}{12} : \frac{6N}{14} + 2 = 3 : 5$, o piuttosto $7N : 9N + 42 = 3 : 5$, e quindi $N = \frac{126}{8} = 15\frac{3}{4}$, il qual valore sostituito nella superiore equazione $PN = 18000$, darà $P . 15\frac{3}{4} = 18000$, e $P = \frac{18000}{15\frac{3}{4}} = 1142,857$; il corpo d'acqua sarà adunque di once $15\frac{3}{4}$ ed il prezzo di ciascun' oncia lire 1142. 17. 2.

Se in questo Problema si supponesse incognito anche il tempo d'orario della competenza B, ma che se ne conoscesse però il rapporto col numero delle once del corpo d'acqua; sì che fosse $T : N = m : n$ in tal caso non avrebbe che a sostituirsi nella competenza di B espressa per $\frac{TN}{14} + 2$, il valore di $T = \frac{m}{n} N$ tolto dall'ultima analogia, convertendosi così l'antecedente rapporto delle competenze nella seguente proporzione $\frac{N}{3} : \frac{\frac{m}{n} N^2}{14} + 2 = 3 : 5$, ossia $14 N : 3 \frac{m}{n} N^2 + 84 = 3 : 5$ da cui si ottiene l'equazione $N = \pm \sqrt{\left(\frac{1225}{81} \cdot \frac{n^2}{m^2} - \frac{252}{9} \cdot \frac{n}{m} \right)} + \frac{35}{9} \frac{n}{m}$.

Suppongasi ora che sia $m : n = 2 : 5$, e si avranno i due valori di N, e i due di T. Ritenuto il segno positivo sarà $N =$

$\sqrt{\left(\frac{1225}{81} \times \frac{25}{4} - \frac{252}{9} \times \frac{5}{2} \right)} + \frac{35}{9} \times \frac{5}{2} = \frac{1}{18} \left(89,135 + 175 \right)$

$= 14,674$, e ritenuto il negativo diverrà $N = \frac{1}{18} \left(175 - 89,135 \right)$ $= 4,77$, e così i corrispondenti valori di T saranno nel primo caso $T = 5,869$, e nel secondo $T = 1,908$. Ora siccome di sopra si è avuto $PN = 18000$, così si avranno anche di P i due valori, cioè $P = \frac{18000}{14,674} = 1226,66$, e $P = \frac{18000}{4,77} = 3773,585$.

§. 9. Col mezzo della surriferita derivata formola ognuno vede facilmente come si possano in qualunque caso paragonare fra di loro tanto i valori delle competenze; quanto gli altri elementi, che le compongono.

§. 10 E' metodo poi tra noi comunemente addottato di contrattare l'uso delle acque in ragione di tempo piuttosto che in ragione di quantità, cosicchè invece di apprezzare l'oncia d'acqua si dà un valore ad un'ora di tempo per l'uso di una data quantità d'acqua. Questi due modi di contrattare però ci devono condurre ad un medesimo risultato, ciò che facilmente si intenderà, se si riflette che l'espressione di *contrattare ad ora* non è che una convenzione addottata per simili contratti, piuttosto che una stretta definizione del modo con cui si

eseguiscono. Ora siccome per quanto si è detto il risultato di una trattativa ad ora non deve differire da quella che si esige all'oncia; così è chiaro, che se il valore di un corpo d'acqua risultante dal prodotto del prezzo dell'oncia nel numero delle once, che lo compongono, si ripartisca sull'orario avremo il valore del tempo che constituisce il detto orario; quindi è che se questo tempo si intenderà diviso in giorni od in ore, il valore risultante sarà del giorno o dell'ora, e questo valore d'ora è appunto, quello, di cui ci serviamo nelle trattative dell'uso delle acque interpolate.

§. 11. Ritenuto questo principio si richiami l'equazione $U = \frac{NT.P}{R}$, la quale se tutta si divide pel tempo d'orario T ridotto in ore si avrà $\frac{U}{24T} = \frac{NP}{24R}$; ma per quanto si disse il valore U diviso per l'orario espresso in ore è il valore dell'ora; questo sarà dunque espresso da $\frac{U}{24T}$; quindi chiamato V questo valore si avrà $\frac{U}{24T} = V$, il quale sostituito nella superiore equazione darà $V = \frac{NP}{24R}$.

ESEMPIO I.

Se si addomandasse quanto importa un'ora per l'uso di una roggia della portata di once 13 che scorra in ruota di giorni 14, ritenuto che il prezzo dell'oncia fosse di lir. 1200.

Fatto $N = 13$; $R = 14$; $P = 1200$, sarà $V = \frac{13 \times 1200}{24 \times 14} = 46\frac{3}{7}$ cioè il valore dell'ora sarà di lir. $46\frac{3}{7}$.

ESEMPIO II.

Importa di sapere quanto debba essere il prezzo dell'oncia di un corpo d'acqua di once 6, che scorra in ruota di giorni 14, di cui si paga all'ora lir. 28.

Sostituiti i valori nella formola surriferita si troverà $P = \frac{24RV}{N} =$

$\frac{24 \times 14 \times 28}{6} = 1568$ lire.

ESEMPIO III.

Si pagano all' ora lire 27 per l' uso di una roggia, che scorre in ruota di giorni 15 il cui valore all'oncia è di lire 960, di quante once sarà il corpo d' acqua?

Fatto $V = 27$; $P = 960$; ed $R = 15$ sarà $N = \frac{24VR}{P} =$

$\frac{27 \times 15 \times 24}{960} = 10\frac{1}{8}$ il corpo d'acqua è adunque once $10\frac{1}{8}$.

ESEMPIO IV.

Quale sarà la ruota che si compete ad un utente, il quale per l'uso di una roggia d' once 10 d' acqua valutata lir. 1200 all' oncia, paga lir. 30 all' ora?

Essendo $R = \frac{NP}{24V}$ si troverà la ruota di giorni $16\frac{2}{3}$.

ESEMPIO V.

Gode un utente di un corpo d'acqua per giorni 4 continui in ruota di giorni 12, della quale pagando egli lir. 30 all' ora trova che questo prezzo corrisponde a lir. 864 annue all' oncia, quale ne sarà la vera competenza, ossia la quantità d'acqua perenne, e quale la quantità del corpo d'acqua?

Dalla equazione $V = \frac{P}{24} \cdot \frac{N}{R}$ si ha $\frac{N}{R} = \frac{24V}{P}$ sostituito questo valore nella prima e fondamentale formola $Q = T \cdot \frac{N}{R}$ (§. 6), si avrà $Q = \frac{24TV}{P}$, e sostituendo i dati valori, sarà $Q = \frac{24 \times 4 \times 30}{864} = 3\frac{1}{3}$

Questa competenza di once $3\frac{1}{3}$ di acqua continua sostituita in luogo di Q nell'equazione $Q = \frac{TN}{R}$ darà $N = \frac{3\frac{1}{3} \times 12}{4} = 10$; e quindi il corpo d'acqua della roggia sarà di once 10.

ESEMPIO VI.

A proprietario di una roggia dopo essersi fissata la propria competenza di tutta l'acqua per giorni 4 in ruota di giorni 14 ne concesse once 8 pei restanti 10 giorni a *B*, che ne pagò il capitale, e diede il rimanente a *C* mediante il pagamento di lire 21 all'ora. Si sa che il prezzo dell'acqua all'oncia tanto di *B*, quanto di *C* sono i medesimi; e che *A* ricavò da questi due contratti il 6 per cento del valore di tutta la roggia, in modo che egli gode la sua competenza gratuitamente; consta altronde che ciascun' oncia d'acqua importò ad *A* tante mille lire, quanto è il numero delle once componenti il corpo d'acqua. Si domanda la portata totale della roggia, il suo valore, il capitale pagato da *B*, oppure il suo interesse in regola del 6 per cento, e le vere competenze d'acqua dei tre utenti.

Chiamata x la portata d'acqua della roggia sarà $1000x$ il valor capitale di un'oncia, e il suo interesse al 6 per $\frac{0}{0}$ $60x$, e intendendo che la quantità P delle formole esprima il prezzo annuale dell'oncia d'acqua, sarà $P = 60x$.

Non godendo *A* alcun'acqua per 10 giorni della ruota, e decorrendone 8 once a favore di *B*, l'acqua defluente nel canale di *C* per lo stesso tempo sarà espressa da $x - 8$.

Assunta pertanto la terza formola $V = \frac{NP}{24R}$, e fatta $N = x - 8$, $T = 60x$, $R = 14$ si avrà $\frac{(x-8)\,60x}{24 \times 14} = V$ e questo sarà il prezzo dell'ora corrispondente alla competenza d'acqua di *C*. Ma si rifletta che questo prezzo non equivale già alle lire 21 all'ora che paga ad *A*;

poi-

poichè è facile di concepire che godendo A per 4 giorni della ruota tutta l'acqua della roggia gratuitamente, il valore di questo deve essere ripartito proporzionatamente sopra le competenze di B, e di C, quindi il capitale pagato da B, od il suo corrispondente interesse, ed il prezzo dell'ora che C contribuisce, stanno ciascuno al vero valore della rispettiva giusta competenza di B, ed al prezzo d'ora della competenza di C, come 14 a 10; ovvero come 7 a 5. Da questo raziocinio scaturisce naturalmente la seguente proporzione: lir. 21 : V :: 7 : 5, da cui si ha $V = \frac{5 \times 21}{7} = 15$. L'equazione pertanto $\frac{(x - 8)\,60x}{24 \times 14} = 15$ servirà a trovare il valore di x, cioè la portata totale della roggia.

Chiamate poi Q', Q'', Q''' le competenze d'acqua rispettive dei tre utenti A, B, C; la prima formola $Q = \frac{NT}{R}$ fornirà le tre seguenti equazioni $Q' = \frac{4x}{14}$, $Q'' = \frac{8 \times 10}{14}$, $Q''' = \frac{(x - 8)\,10}{14}$; nella prima, e terza delle quali sostituito il valore di x si avranno le tre competenze ricercate, e se ne farà la prova verificando l'equazione $Q' + Q'' + Q''' = x$.

Finalmente se nella seconda formola $U = \frac{NTP}{R}$ si fa $N = 8$, $T = 10$, $P = 60x$, $R = 14$ si avrà l'equazione $U = \frac{8 \times 10 \times 60x}{14}$, in cui U rappresenta il vero valore annuo della competenza d'acqua di B. Ma siccome per la riflessione sopra esposta questo vero valore deve corrispondere a cinque settimi dell'interesse sopra il capitale pagato da B in regola del 6 per cento; così chiamando y questo interesse, se ne avrà la sua quantità sostituendo nell'equazione $\frac{5y}{7} = \frac{8 \times 10 \times 60x}{14}$ il valore trovato di x, e sarà verificata l'esattezza del calcolo, qualora si ottenga $y + 21 \times 10 \times 24 = 60x^2$, per essere $21 \times 10 \times 24$ eguale al pagamento annuo di C, e $60x^2$ il valore annuo di tutta l'acqua della roggia.

La prima equazione $\frac{(x - 8)\,60x}{24 \times 14} = 15$ a cui si riporta tutta la

soluzione del problema, fatto scomparire il denominatore del primo membro, e divisa per 60, diviene $x^2 - 8x = 84$, dalla quale equazione si ricava $x = 4 \pm \sqrt{100} = 14$, servendosi del valore positivo, unico conveniente al caso.

Quindi $Q' = \frac{4 \times 14}{14} = 4$ once competenza di *A*.

$Q'' = \frac{8 \times 10}{14} = \frac{40}{7} =$ once $5\frac{5}{7}$ competenza di *B*.

$Q''' = \frac{(14-8)\,10}{14} = \frac{30}{7} =$ once $4\frac{2}{7}$ competenza di *C*.

Prova $\ldots\ldots 4 + 5\frac{5}{7} + 4\frac{2}{7} = 14$.

Parimenti si avrà $\frac{5y}{7} = \frac{8 \times 10 \times 60 \times 14}{14} = 4800$

$y = \frac{4800 \times 7}{5} = 6720$.

Prova $\ldots 6720 + 21 \times 10 \times 24 = 6720 + 5040 = 60 \times 14^2 = 11760$.

Il capitale adunque sborsato da *B* era di lire $6720 \times \frac{100}{6}$ ossia lire 112000; ed il capitale importo originario di tutta l'acqua in tempo che *A* ne fece l'acquisto fu di lire 14000×14 ossia di lire $11760 \times \frac{100}{6}$, cioè di lire 196000. Il che si doveva ritrovare.

§. 12. Abbiamo veduto come siansi dalla formola generale $Q = \frac{NT}{R}$ derivate le altre due $U = NP \cdot \frac{T}{R}$, e $V = \frac{NP}{24R}$, e come ciascuna di queste sciolga facilmente le analoghe questioni, e del proprio genere, cioè di quelle in cui gli elementi sono comuni alla rispettiva formola. Ma come può accadere, che una questione mentre da una parte è mancante di alcuni dati, perchè possa applicarsi ad una delle tre surriferite formole, involga invece altri elementi, che ad un' altra di esse appartenessero; così per facilitare la soluzione dei problemi misti è d'uopo, che pure miste siano le espressioni, che devono rappresentare i valori di Q, U, V.

§. 13. A tale effetto giova di osservare, come con una semplice

sostituzione di valori di un' equazione nell' altra si possono ottenere per ciascuna delle suddette lettere tre differenti espressioni, ed eguali tra loro ; mentre è chiaro che la quantità Q, oltre di essere espressa per $\frac{NT}{R}$, può essere anche in altre due maniere rappresentata, contenendo l'una l'elemento del *prezzo*, e l' altra quello dell' *orario* ; così pure il valore U, oltre di avere la propria espressione di sopra esposta, può assumerne due altre, in una delle quali entri l' elemento dell' acqua perenne, o ridotta, e nell' altra il valore del tempo ossia dell' ora ; lo stesso dicasi del valore V.

§. 14. In fatti se nell' equazione $Q = \frac{NT}{R}$ si sostituisca primo il valore di $\frac{NT}{R}$ tolto dalla seconda formola $U = \frac{NT}{R} . P$, e quindi quello di $\frac{N}{R}$ dedotto dalla terza, si avrà $Q = \frac{U}{P}$, e $Q = \frac{24TV}{P}$. Così pure all' equazione $U = \frac{NT}{R} . P$, sostituito il valore di $\frac{NT}{R}$ tolto dalla prima formola, e quello di $\frac{NP}{R}$ proveniente dalla terza, avremo $U = QP = 24TV$. Finalmente collo stesso ordine di sostituzione si avranno le espressioni eguali di V. Dunque potranno rappresentarsi le quantità Q, U, V ciascuna in tre modi diversi, cioè

$$Q = \frac{NT}{R} = \frac{U}{P} = \frac{24TV}{P}$$

$$U = \frac{NT}{R} . P = QP = 24\,TV$$

$$V = \frac{NP}{24R} = \frac{QP}{24T} = \frac{U}{24T} .$$

§. 15. Egli è quindi evidente che si potrà sempre conoscere la quantità d'acqua equivalente, ossia ridotta dallo stato d'interpolazione, quando in mancanza della notizia del numero delle once d'acqua della roggia, che devesi usare, dell' orario, e della ruota, si abbiano i dati soltanto del valore del corpo dell' acqua usato interpolatamente, e del prezzo di ciascun' oncia, oppure siano conosciuti l'orario, il prezzo

suddetto, ed il valore dell' ora, o del tempo: e siccome quanto si disse rapporto alla quantità Q, può agevolmente applicarsi ai valori U, e V, ne viene di conseguenza, che per poco si sappia maneggiare la formola generale, e le derivate, si potranno risolvere tutte le questioni in qualunque modo vengano proposte. Giova però avvertire, che delle nove equazioni di sopra esposte, la seconda, e la quinta non contenendo alcun elemento dell' orario, sebbene non appartengano direttamente allo scopo, che ci siamo proposti, in molti casi però ci possono servire di facilitazione nelle soluzioni di analoghi problemi.

§. 16. Ora che abbiamo veduto il metodo generale, che ci può servire di scorta nelle soluzioni delle varie questioni, o dei problemi relativi alla competenza delle acque regolate sugli orarj, è necessario di far osservare ancora, che il diritto dell' uso di queste competenze può essere limitato soltanto così al tempo di estate, come al tempo d'inverno, d'onde nasce la distinzione comunemente conosciuta sotto il nome di *acqua estiva*, ed *jemale*. Il tempo estivo, secondo fu addottato dalla consuetudine, è quello che è compreso tra il giorno 25 di Marzo, e il giorno 8 di Settembre; il restante dell' anno è tempo jemale. Per brevità noi chiameremo *competenza interrotta* quella, che corrisponde o al solo tempo estivo, od al solo jemale, e *competenza continua* quella di tutto l'anno.

§. 17. Nella stagione d'inverno, in cui cessano i bisogni delle ordinarie irrigazioni, si ha in disprezzo quelle acque che in tempo estivo assumono valori anche staordinarj, onde dagli utenti si procura di fugarle, allontanandole come perniciose da' proprj fondi; ma si tiene però conto di quelle acque, le quali necessitano all' esercizio delle macchine idrauliche, singolarmente de' mulini e piste di riso *dette pile*, ed all' inaffiamento continuo de' prati così detti *a marcita*; il valore delle quali acque, sebbene di molto inferiore a quello delle acque estive, è sempre da determinarsi in concorso delle particolari circostanze di luogo, e di bisogno.

§. 18. La utilità pertanto di tali acque dà luogo a contrattazioni,

e a commutazioni d competenze interrotte in continue, e viceversa; ma queste competenze, o commutazioni possono sempre calcolarsi col mezzo delle sovra esposte formole, le quali non vanno a soffrire alterazione alcuna ne' loro elementi, nè conseguentemente ne' loro risultati; solo bastando di ritenere il principio, cioè, che se la quantità d'acqua interpolata, ossia la competenza sarà interrotta (§. 16), anche l'acqua continua che vi deve corrispondere dovrà considerarsi continuamente defluente sì, ma nel solo tempo estivo, o jemale; e se questa competenza sarà continua, continua e perenne per tutto l'anno ne sarà la corrispondente quantità d'acqua; a differenza del fitto, o di altra convenuta prestazione di una competenza qualunque, la quale, sebbene interrotta, viene riconosciuta come una contrattazione annua, perchè effettivamente il corso delle irrigazioni si ripete una volta in ciascun anno.

§ 19. In fatti la formola $Q = \frac{NT}{R}$ sarà sempre l'espressione della competenza, sia che questa si riferisca ad una costante parte di ciascun anno, sia che si estenda all' anno intiero. Importa però il sapere se essa sia interrotta o continua, mentre è manifesto, che se in ipotesi la succennata espressione rappresentasse una competenza interrotta, e che si volesse riferirla ad una competenza continua (fatta astrazione dal valore delle acque estive, ed jemali) sarebbe necessario di diminuirla nella proporzione del tempo estivo, o jemale all' anno intero, di modo che chiamando M questo tempo estivo o jemale, ed A l'anno; la succennata espressione dell' acqua interpolata si cambierebbe in $\frac{NT}{R} \cdot \frac{M}{A}$; ed in eguale modo una competenza continua espressa per $\frac{NT}{R}$ quando vogliasi riferire ad una competenza interrotta si cambierà in $\frac{NT}{R} \cdot \frac{A}{M}$.

§. 20. Che ne sia il vero, richiamata la superiore definizione della competenza al §. 2, facilmente si vede, che la competenza interrotta deve riguardarsi in paragone di una competenza continua co-

me una quantità d'acqua ancora interpolata; di modo che ritenute come sopra, che M esprima il tempo estivo, o jemale, ed A l'anno; egli è chiaro, che se si moltiplicherà per M la quantità di acqua ridotta $\frac{NT}{R}$, avremo l'acqua assoluta decorsa nel suddetto tempo M espressa per $\frac{NT}{R}.M$: ora se questa assoluta quantità d'acqua si distribuisce sul tempo A, otterremo in $\frac{NT}{R}.\frac{M}{A}$ l'espressione della competenza interrotta, ridotta continua. Parimenti se la quantità d'acqua ridotta $\frac{NT}{R}$ decoresse tutto l'anno, troveremo la quantità assoluta di essa nel prodotto $\frac{NT}{R}.A$, la quale quantità, se equabilmente si ripartisca sul tempo M, il quoto risultante $\frac{NT}{R}.\frac{A}{M}$ sarà l'espressione della competenza continua trasmutata in interrotta. Egli è adunque dimostrato che la competenza interrotta riferita alla continua viene espressa da $\frac{NT}{R}.\frac{M}{A}$, e viceversa da $\frac{NT}{R}.\frac{A}{M}$ la competenza continua rispetto all'interrotta, come si disse al §. antecedente.

§. 21. Ad oggetto però di riportarci ai casi occorribili nella pratica, egli è d'uopo ricordarsi di quanto si è detto al §. 17 sulla maggiore e minore importanza, o valutazione dell'acqua estiva in confronto della jemale; imperciocchè egli è evidente, che la competenza estiva in riguardo alla jemale non deve generalmente riguardarsi, che sotto l'unico rapporto di valore, per la ragione che, esclusa in ipotesi l'idea del valore, dove eguali fossero gli elementi, che determinano le competenze interrotte estive e jemali, ne seguirebbe che eguali sarebbero ancora le competenze istesse, ciò che è assurdo, e contrario alla ragione, la quale dimostra che, in parità di circostanze, la competenza estiva, è generalmente molto più apprezzabile della competenza jemale.

§. 22. Egli è però necessario per maggior schiarimento di dimostrare, che ove trattasi di *valori di competenze*, gli elementi dei prezzi

escludono quelli del tempo estivo, o jemale, od annuo. Ripigliando di fatti l'espressione della competenza $\frac{NT}{R}$, è evidente, che se questa si moltiplica per M, ed indi pel prezzo P dell'acqua estiva o jemale ripartito sull'uno, o l'altro de' tempi M, avremo per espressione del corrispondente valore $\frac{NTM}{R} \cdot \frac{P}{M} = \frac{NT}{R} \cdot P$, che è il vero valore dell'acqua jemale, od estiva, ed in cui scompare l'elemento del tempo M. Supposto poi egualmente, che la competenza suddetta $\frac{NT}{R}$ fosse estensiva a tutto l'anno A., la competenza assoluta sarebbe $\frac{NT}{R} \cdot A$, il cui prodotto nel prezzo corrispondente P' distribuito sull'anno A, ci fornirà il vero valore di una competenza continua espressa in $\frac{NTA}{R} \cdot \frac{P'}{A} = \frac{NTP'}{R}$, nella quale parimente svanisce il tempo A.

Ritenuto pertanto, che U sia il valore di una competenza interrotta espressa per $\frac{NTP}{R}$, ed U' quello di una competenza continua marcata per $\frac{ntP'}{r}$, si avrà $U : U' = \frac{NTP}{R} : \frac{ntP'}{r}$, nella quale supposto $\frac{NT}{R} = \frac{nt}{r}$ si avrà $U : U' = P : P'$, dalla quale analogia si ricava, che i valori della quantità d'acqua giornaliera, pel solo tempo d'estate, o d'inverno, e di quella che in egual copia defluisce in ciascun giorno di tutto l'anno, sono tra loro come i rispettivi prezzi. Se poi nella suddetta analogia si supporranno eguali i valori, si troverà che i prezzi seguiranno la ragione reciproca delle competenze interrotte, e continue; imperciocchè se $U = U'$ sarà pure $\frac{NT}{R} \cdot P = \frac{nt}{r} \cdot P'$, e quindi

$$P : P' = \frac{nt}{r} : \frac{NT}{R}.$$

ESEMPIO I.

Se un utente avesse una competenza jemale di once 6 di acqua coll' orario di giorni 8 in ruota di giorni 12, quale sarebbe la competenza estiva, che potrebbe sostituirvisi; ritenuto, che il rapporto de' prezzi estivo, ed jemale sia :: 10 : 1.?

Per condizione del problema non dovendo variare i valori delle due competenze, saranno i prezzi reciprocamente come le competenze stesse, e perciò chiamando x quella che si ricerca, si istituirà la seguente proporzione $10 : 1 = \frac{6 \times 8}{12} : x = \frac{2}{5}$; dunque l'addimandata competenza corrisponderà a due quinti d'oncia d'acqua continua.

ESEMPIO II.

Trattasi di commutare una competenza estiva di once 8 coll' orario di giorni 4 in ruota di giorni 12, in una competenza continua, quale sarà questa competenza?

Dato il prezzo dell' acqua estiva di lire 1200, e quello dell' acqua jemale di lire 50, chiamata x la competenza continua, sarà il prezzo dell' acqua di tutto l' anno di lire 1250; epperò, ritenuto il principio dell' eguaglianza supposta ne' valori dalle due competenze, si avrà $1250 : 1200 = \frac{8 \times 4}{12} : x = 2{,}56$.

§. 23. Premessi questi principj, si vede come facilmente si possono commutare le competenze interrotte in competenze continue, e viceversa; ponendo in compenso della diversità de' prezzi, o la diminuzione, o l'aumento del numero delle once d'acqua, o dell' orario, e per lo contrario l'aumento, o la minorazione della lunghezza della ruota.

ESEMPIO I.

Abbia un utente l'uso estivo d'una roggia della portata di once 6 d'acqua nell' orario di giorni 7, ed in ruota di giorni 12, e voglia com-

commutare questa sua competenza in un' altra eguale continua, colla quale però gli sia mantenuto nel tempo estivo lo stesso orario, e la medesima ruota per l'irrigazione de' proprj fondi, e che nell' inverno abbia continuamente l'acqua, onde mantenere alcuni prati *detti a marcita*, quale ne sarà la quantità d'acqua che si dovrà assegnare a questo utente?

Chiamando x il numero delle once d'acqua da sostituirsi nella primiera competenza, e ritenuto che il rapporto del prezzo P dell' acqua estiva desunto dalle circostanze locali, e di necessità (§. 17.) sia al prezzo P' dell' acqua jemale $= m : n$, per condizione del problema dovrà essere $\frac{NTP}{R} = \frac{xTP}{R} + P'x$, dalla quale equazione si ricava $x = \frac{NTP}{TP+RP'}$, e fatte le opportune sostituzioni si avrà $x = \frac{6 \times 7m}{7m+12n} = \frac{42m}{7m+12n}$, e supposto che $m : n = 12 : 1$, si otterrà $x = \frac{42}{8} = 5\frac{1}{4}$ dunque, perchè il suddetto utente in questa commutazione non sia pregiudicato nella sua primiera competenza, dovrà avere once $5\frac{1}{4}$ assai prossimamente d'acqua in tempo di estate negli indicati orario, e ruota, ed altrettanto d'acqua continua nel tempo d'inverno.

COROLLARIO I.

Se invece il medesimo utente si fosse proposto di ritenere per l'estate le stesse once 6 d'acqua interpolata nella succennata ruota di giorni 12, e di averle continue nel tempo d'inverno, sì che il compenso dovesse eseguirsi colla limitazione dell' orario; in questo caso chiamato y l'orario, e ritenute le suddette denominazioni, e valori si avrà $NTP = NPy + \frac{n}{m} \times PNR$, dalla quale equazione si ha . . . . .

$y = \frac{NTP - \frac{n}{m}PNR}{NP} = \frac{mT - nR}{m}$, e fatta la sostituzione de' valori numerici diverrà $y = \frac{12 \times 7 - 12}{12} = 6$. Onde si conchiude, che in tempo

estivo, dovrebbero assegnarsi giorni 6 di uso delle once 6 di acqua nella succennata ruota, perchè continuamente possa godere lo stesso corpo d'acqua in tempo d'inverno.

COROLLARIO II.

Qualora si volessero ritenere invariabili le quantità di acqua di once 6, e l'orario di giorni 7, e che il compenso per la continuazione della stess' acqua nel tempo jemale cadesse sulla ruota; fatto $R = z$, si troverà la suddetta equazione cambiata in $\frac{NTP}{R} = \frac{NTP}{z} + \frac{n}{m}.PN$, la quale divisa per PN, e fatta l'opportuna riduzione darà $z = m \times \frac{RT}{mT - nR} = 12 \times \frac{84}{84 - 12} = 14$. La ruota adunque d'assegnarsi nel tempo estivo in compenso dell'acqua jemale, dovrebbe essere di giorni 14.

COROLLARIO III.

Se finalmente si dovesse commutare l'estiva competenza suddetta espressa per $6 \times \frac{7}{12}$ in una competenza continua, in modo però che nel tempo jemale vi fosse un nuovo orario t, ed un' altra ruota r, in allora chiamato x il numero N della nostra formola, che deve rappresentare l'addimandata quantità dell' acqua, ed $m : n$ il rapporto de' prezzi P e P' come sopra, l'equazione sarà $\frac{NTP}{R} = \frac{xTP}{R} + \frac{xtP'}{r}$ ed $x = \frac{NTPr}{TPr + tP'R} = mr.\frac{NT}{mrT + ntR}$, nella quale, supposto come precedentemente, che $m : n = 12 : 1$, e che sia la nuova ruota $r = 8$, ed il tempo $t = 4$, si troverà $x = 5\frac{3}{5}$.

COROLLARIO IV.

Supposto poi che i prezzi fossero eguali, cioè che fosse $m = n$, e che anche nel tempo jemale si volesse proseguire il godimento dell'acqua nell' orario, e nella ruota come in estate, si troverà $x = \frac{N}{2} = 3$.(*)

ESEMPIO II.

Trattasi di commutare una competenza continua in una interrotta estiva; la competenza continua sia di once $4\frac{1}{2}$ da usarsi per giorni 6 in ruota di giorni 10; quale sarà la quantità d'acqua che si dovrà assegnare, perchè la competenza estiva abbia ad avere un orario di giorni 4 in ruota di giorni 12?

Per quanto si disse al §. 22 l'espressione $\frac{NTP}{R}$ corrisponde al valore della competenza continua, la quale dovendo eguagliarsi in valore alla competenza interrotta estiva espressa giusta la prima derivata formola §. 9; chiamato x il numero delle once d'acqua, t il tempo d'orario, r la ruota, e P' il prezzo dell'acqua estiva, sarà $\frac{xtP'}{r} = \frac{NTP}{R}$, e quindi $x = \frac{NTPr}{tRP'}$, nella quale fatta la sostituzione de' valori numerici, si avrà $x = \frac{4\frac{1}{2} \times 6 \times 12}{4 \times 10} \times \frac{P}{P'}$; ora conoscendosi il prezzo dell' acqua estiva $P' = 900$, ed il prezzo dell' acqua jemale di lire 30, sarà il

---

(*) *La supposta eguaglianza de' prezzi in questo caso, non c' induce già a ritenere, che la quantità d' acqua ridotta defluente in tempo eguale tanto nell' estate, che nell' inverno abbia l'egual valore; ma bensì che tutta la quantità d'acqua estiva abbia lo stesso valore di tutta la quantità jemale; onde essendo il tempo estivo maggiore del jemale, si conchiude necessariamente nell' ipotesi, che l'acqua estiva, in eguale tempo, vale meno della jemale.*

prezzo P dell' acqua interpolata di tutto l'anno di lire 980 ; e quindi $x = \frac{81}{10} \times \frac{980}{900} = 8{,}82$.

Perchè adunque la competenza suddetta nella commutazione da continua in interrotta estiva non venga a soffrire alcuna alterazione, dovranno assegnarsi once 8,82 d'acqua interpolata.

Si potrà poi egualmente ottenere la stessa comutazione di competenza, se invece di determinare, come si è fatto, la maggiore quantità d'acqua interpolata, si calcolerà o il maggiore orario, od il minor tempo della ruota.

§. 24. Col mezzo pertanto de' sovra esposti esempj, crediamo di avere bastantemente dimostrata la semplicità, e l'esattezza del metodo, che ci somministrano la formola fondamentale, e le due derivate per assicurarsi dell' utilità della loro applicazione ai differenti casi di consimil genere, che nell' uso pratico delle acque interpolate, la natura delle contrattazioni, e dei diversi bisogni variamente combina.

FINE.

TAVOLA PARABOLICA

Principiando dall' unità sino a 2000.

avvertendo che l'ultima cifra decimale è la più prossima al vero.

$a+b$ | $\sqrt{a+b}$ | $a+b\sqrt{a+b}$

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1	1, 00000	1, 00000
2	1, 41421	2, 82842
3	1, 73205	5, 19615
4	2, 00000	8, 00000
5	2, 23607	11, 18035
6	2, 44949	14, 69694
7	2, 64575	18, 52025
8	2, 82843	22, 62744
9	3, 00000	27, 00000
10	3, 16228	31, 62280
11	3, 31662	36, 48282
12	3, 46410	41, 56920
13	3, 60555	46, 87215
14	3, 74166	52, 38324
15	3, 87298	58, 09470
16	4, 00000	64, 00000
17	4, 12310	70, 09270
18	4, 24264	76, 36752
19	4, 35890	82, 81910
20	4, 47213	89, 44260
21	4, 58257	96, 23397
22	4, 69041	103, 18902
23	4, 79583	110, 30409
24	4, 89898	117, 57552
25	5, 00000	125, 00000

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
26	5, 09902	132, 57452
27	5, 19615	140, 29605
28	5, 29150	148, 16200
29	5, 38516	156, 16974
30	5, 47722	164, 31660
31	5, 56776	172, 60056
32	5, 65685	181, 01920
33	5, 74456	189, 57048
34	5, 83095	198, 25230
35	5, 91608	207, 06280
36	6, 00000	216, 00000
37	6, 08276	225, 06212
38	6, 16441	234, 24758
39	6, 24500	243, 55500
40	6, 32455	252, 98200
41	6, 40312	262, 52792
42	6, 48074	272, 19108
43	6, 55744	281, 96992
44	6, 63325	291, 86300
45	6, 70820	301, 80900
46	6, 78233	311, 98718
47	6, 85565	322, 21555
48	6, 92820	332, 55360
49	7, 00000	343, 00000
50	7, 07107	353, 55350
51	7, 14143	364, 21293
52	7, 21110	374, 97720
53	7, 28011	385, 84583
54	7, 34847	396, 81738
55	7, 41620	407, 89100
56	7, 48331	419, 06536
57	7, 54983	430, 34031
58	7, 61577	441, 71466
59	7, 68114	453, 18726

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
60	7, 74597	464, 75820
61	7, 81025	476, 42525
62	7, 87401	488, 18862
63	7, 93725	500, 04675
64	8, 00000	512, 00000
65	8, 06226	524, 04690
66	8, 12404	536, 18664
67	8, 18535	548, 41845
68	8, 24621	560, 74228
69	8, 30662	573, 15678
70	8, 36660	585, 66200
71	8, 42615	598, 25665
72	8, 48528	610, 94016
73	8, 54400	623, 71200
74	8, 60232	636, 57168
75	8, 66025	649, 51875
76	8, 71780	662, 55280
77	8, 77496	675, 67192
78	8, 83176	688, 87728
79	8, 88819	702, 16701
80	8, 94427	715, 54160
81	9, 00000	729, 00000
82	9, 05538	742, 54116
83	9, 11043	756, 16569
84	9, 16515	769, 87260
85	9, 21954	783, 66090
86	9, 27362	797, 53132
87	9, 32738	811, 48206
88	9, 38083	825, 51304
89	9, 43398	839, 62422
90	9, 48683	853, 81470
91	9, 53939	868, 08449
92	9, 59166	882, 43272
93	9, 64365	896, 85945

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
94	9, 69536	911, 36384
95	9, 74679	925, 94505
96	9, 79796	940, 60416
97	9, 84886	955, 33942
98	9, 89949	970, 15002
99	9, 94987	985, 03713
100	10, 00000	1000, 00000
101	10, 04987	1015, 03687
102	10, 09950	1030, 14900
103	10, 14889	1045, 33567
104	10, 19804	1060, 59616
105	10, 24695	1075, 92975
106	10, 29563	1091, 33678
107	10, 34408	1106, 81656
108	10, 39230	1122, 36840
109	10, 44031	1137, 99379
110	10, 48809	1153, 68990
111	10, 53565	1169, 45715
112	10, 58300	1185, 29600
113	10, 63014	1201, 20582
114	10, 67708	1217, 18712
115	10, 72380	1233, 23700
116	10, 77033	1249, 35828
117	10, 81665	1265, 54805
118	10, 86278	1281, 80804
119	10, 90871	1298, 13649
120	10, 95445	1314, 53400
121	11, 00000	1331, 00000
122	11, 04536	1347, 53392
123	11, 09054	1364, 13642
124	11, 13553	1380, 80572
125	11, 18034	1397, 54250
126	11, 22497	1414, 34622
127	11, 26943	1431, 21761

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
128	11, 31371	1448, 15488
129	11, 35782	1465, 15878
130	11, 40175	1482, 22750
131	11, 44552	1499, 36312
132	11, 48912	1516, 56384
133	11, 53256	1533, 83048
134	11, 57584	1551, 16256
135	11, 61895	1568, 55825
136	11, 66190	1586, 01840
137	11, 70470	1603, 54390
138	11, 74734	1621, 13292
139	11, 78983	1638, 78637
140	11, 83216	1656, 50240
141	11, 87434	1674, 28194
142	11, 91637	1692, 12454
143	11, 95826	1710, 03118
144	12, 00000	1728, 00000
145	12, 04159	1746, 03055
146	12, 08305	1764, 12530
147	12, 12435	1782, 27945
148	12, 16552	1800, 49696
149	12, 20655	1818, 77595
150	12, 24745	1837, 11750
151	12, 28820	1855, 51820
152	12, 32883	1873, 98216
153	12, 36932	1892, 50596
154	12, 40967	1911, 08918
155	12, 44990	1929, 73450
156	12, 49000	1948, 44000
157	12, 52996	1967, 20372
158	12, 56980	1986, 02840
159	12, 60952	2004, 91368
160	12, 64911	2023, 85760
161	12, 68858	2042, 86138

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
162	12, 72792	2061, 92304
163	12, 76714	2081, 04382
164	12, 80625	2100, 22500
165	12, 84523	2119, 46295
166	12, 88410	2138, 76060
167	12, 92285	2158, 11595
168	12, 96148	2177, 52864
169	13, 00000	2197, 00000
170	13, 03840	2216, 52800
171	13, 07670	2236, 11570
172	13, 11488	2255, 75936
173	13, 15295	2275, 46035
174	13, 19090	2295, 21660
175	13, 22876	2315, 03300
176	13, 26650	2334, 90400
177	13, 30413	2354, 83101
178	13, 34166	2374, 81548
179	13, 37909	2394, 85711
180	13, 41641	2414, 95380
181	13, 45362	2435, 10522
182	13, 49074	2455, 31468
183	13, 52775	2475, 57825
184	13, 56466	2495, 89744
185	13, 60147	2516, 27195
186	13, 63818	2536, 70148
187	13, 67479	2557, 18573
188	13, 71131	2577, 72628
189	13, 74773	2598, 32097
190	13, 78405	2618, 96950
191	13, 82027	2639, 67157
192	13, 85641	2660, 43072
193	13, 89244	2681, 24092
194	13, 92839	2702, 10756
195	13, 96424	2723, 02680

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
196	14, 00000	2744, 00000
197	14, 03567	2765, 02699
198	14, 07125	2786, 10750
199	14, 10673	2807, 23927
200	14, 14213	2828, 42600
201	14, 17745	2849, 66745
202	14, 21267	2870, 95934
203	14, 24781	2892, 30543
204	14, 28286	2913, 70344
205	14, 31782	2935, 15310
206	14, 35270	2956, 65620
207	14, 38749	2978, 21043
208	14, 42220	2999, 81760
209	14, 45683	3021, 47747
210	14, 49138	3043, 18980
211	14, 52584	3064, 95224
212	14, 56022	3086, 76664
213	14, 59452	3108, 63276
214	14, 62874	3130, 55036
215	14, 66288	3152, 51920
216	14, 69694	3174, 53904
217	14, 73092	3196, 60964
218	14, 76482	3218, 73076
219	14, 79865	3240, 90435
220	14, 83240	3263, 12800
221	14, 86607	3285, 40147
222	14, 89966	3307, 72452
223	14, 93318	3330, 09914
224	14, 96663	3352, 52512
225	15, 00000	3375, 00000
226	15, 03330	3397, 52580
227	15, 06652	3420, 10004
228	15, 09967	3442, 72476
229	15, 13274	3465, 39746

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
230	15, 16575	3488, 12250
231	15, 19868	3510, 89508
232	15, 23155	3533, 71960
233	15, 26434	3556, 58022
234	15, 29706	3579, 51204
235	15, 32971	3602, 48185
236	15, 36229	3625, 50044
237	15, 39480	3648, 56760
238	15, 42725	3671, 68550
239	15, 45962	3694, 84918
240	15, 49193	3718, 06320
241	15, 52417	3741, 32497
242	15, 55635	3764, 73670
243	15, 58846	3787, 99578
244	15, 62050	3811, 40200
245	15, 65247	3834, 85515
246	15, 68439	3858, 35994
247	15, 71623	3881, 90881
248	15, 74801	3905, 50648
249	15, 77973	3929, 15277
250	15, 81139	3952, 84750
251	15, 84298	3976, 58798
252	15, 87451	4000, 37652
253	15, 90597	4024, 21041
254	15, 93738	4048, 09452
255	15, 96872	4072, 02360
256	16, 00000	4096, 00000
257	16, 03122	4120, 02354
258	16, 06238	4144, 09404
259	16, 09348	4168, 21132
260	16, 12451	4192, 37260
261	16, 15549	4216, 58289
262	16, 18641	4240, 83942
263	16, 21727	4265, 14201

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
264	16, 24808	4289, 49312
265	16, 27882	4313, 88730
266	16, 30951	4338, 32966
267	16, 34013	4362, 81471
268	16, 37070	4387, 34760
269	16, 40122	4411, 92818
270	16, 43168	4436, 55360
271	16, 46208	4461, 22368
272	16, 49242	4485, 93824
273	16, 52271	4510, 69983
274	16, 55294	4535, 50556
275	16, 58312	4560, 35800
276	16, 61325	4585, 25700
277	16, 64332	4610, 19964
278	16, 67333	4635, 18574
279	16, 70329	4660, 21791
280	16, 73320	4685, 29600
281	16, 76305	4710, 41705
282	16, 79285	4735, 58370
283	16, 82260	4760, 79580
284	16, 85230	4786, 05320
285	16, 88194	4811, 35290
286	16, 91153	4836, 69758
287	16, 94107	4862, 08709
288	16, 97056	4887, 52128
289	17, 00000	4913, 00000
290	17, 02939	4938, 52310
291	17, 05872	4964, 08752
292	17, 08801	4989, 69892
293	17, 11724	5005, 35132
294	17, 14643	5041, 05042
295	17, 17556	5066, 79020
296	17, 20465	5092, 57640
297	17, 23369	5118, 40593

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
298	17, 26268	5144, 27864
299	17, 29162	5170, 19438
300	17, 32051	5196, 15300
301	17, 34935	5222, 15435
302	17, 37815	5248, 20130
303	17, 40690	5274, 29070
304	17, 43559	5300, 41936
305	17, 46425	5326, 59625
306	17, 49285	5352, 81210
307	17, 52141	5379, 07287
308	17, 54993	5405, 37844
309	17, 57839	5431, 72251
310	17, 60682	5458, 11420
311	17, 63519	5484, 54409
312	17, 66352	5511, 01824
313	17, 69181	5537, 53653
314	17, 72004	5564, 09256
315	17, 74824	5590, 69560
316	17, 77639	5617, 33924
317	17, 80450	5644, 02650
318	17, 83255	5670, 75090
319	17, 86057	5697, 52183
320	17, 88854	5724, 33280
321	17, 91647	5751, 18687
322	17, 94436	5778, 08392
323	17, 97220	5805, 02060
324	18, 00000	5832, 00000
325	18, 02776	5859, 02200
326	18, 05547	5886, 08322
327	18, 08314	5913, 18678
328	18, 11077	5940, 33256
329	18, 13836	5967, 52044
330	18, 16590	5994, 74700
331	18, 19340	6022, 01540

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
332	18, 22087	6049, 32884
333	18, 24829	6076, 68057
334	18, 27567	6104, 07378
335	18, 30300	6131, 50500
336	18, 33030	6158, 98080
337	18, 35756	6186, 49772
338	18, 38478	6214, 05564
339	18, 41195	6241, 65105
340	18, 43909	6269, 29060
341	18, 46618	6296, 96738
342	18, 49324	6324, 68808
343	18, 52026	6352, 44918
344	18, 54724	6380, 25056
345	18, 57417	6408, 08865
346	18, 60107	6435, 97022
347	18, 62794	6463, 89518
348	18, 65476	6491, 85648
349	18, 68154	6519, 85746
350	18, 70829	6547, 90150
351	18, 73499	6575, 98149
352	18, 76166	6604, 10432
353	18, 78829	6632, 26637
354	18, 81489	6660, 47106
355	18, 84144	6688, 71120
356	18, 86796	6716, 99376
357	18, 89444	6745, 31508
358	18, 92089	6773, 67862
359	18, 94729	6802, 07711
360	18, 97366	6830, 51760
361	19, 00000	6859, 00000
362	19, 02630	6887, 52060
363	19, 05256	6916, 07928
364	19, 07878	6944, 67592
365	19, 10497	6973, 31405

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
366	19, 13113	7001, 99358
367	19, 15724	7030, 70708
368	19, 18333	7059, 46544
369	19, 20937	7088, 25753
370	19, 23538	7117, 09060
371	19, 26136	7145, 96456
372	19, 28730	7174, 87560
373	19, 31321	7203, 82733
374	19, 33908	7232, 81592
375	19, 36492	7261, 84500
376	19, 39072	7290, 91072
377	19, 41649	7320, 01673
378	19, 44222	7349, 15916
379	19, 46792	7378, 34168
380	19, 49359	7407, 56420
381	19, 51922	7436, 82282
382	19, 54482	7466, 12124
383	19, 57038	7495, 45554
384	19, 59592	7524, 83328
385	19, 62142	7544, 42920
386	19, 64688	7583, 69568
387	19, 67231	7613, 18397
388	19, 69771	7642, 71148
389	19, 72308	7672, 27812
390	19, 74841	7701, 87990
391	19, 77372	7731, 52452
392	19, 79899	7761, 20408
393	19, 82423	7790, 92239
394	19, 84943	7820, 67542
395	19, 87461	7850, 47095
396	19, 89975	7880, 30100
397	19, 92486	7910, 16942
398	19, 94994	7940, 07512
399	19, 97498	7970, 01702

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
400	20, 00000	8000, 00000
401	20, 02498	8030, 01698
402	20, 04994	8060, 07588
403	20, 07486	8090, 16858
404	20, 09975	8120, 29900
405	20, 12461	8150, 46705
406	20, 14944	8180, 67264
407	20, 17424	8210, 91568
408	20, 19901	8241, 19608
409	20, 22375	8271, 51375
410	20, 24846	8301, 86860
411	20, 27313	8332, 25643
412	20, 29778	8362, 68536
413	20, 32240	8393, 15120
414	20, 34699	8423, 65386
415	20, 37155	8454, 19325
416	20, 39608	8484, 76928
417	20, 42058	8515, 38186
418	20, 44505	8546, 03090
419	20, 46949	8576, 71631
420	20, 49390	8607, 43800
421	20, 51828	8638, 19588
422	20, 54264	8668, 99408
423	20, 56696	8699, 82408
424	20, 59126	8730, 69424
425	20, 61553	8761, 60025
426	20, 63977	8792, 54202
427	20, 66398	8823, 51946
428	20, 68816	8854, 53248
429	20, 71231	8885, 58099
430	20, 73644	8916, 66920
431	20, 76054	8947, 79274
432	20, 78461	8978, 95152
433	20, 80865	9010, 14545

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
434	20, 83267	9041, 37878
435	20, 85665	9072, 64275
436	20, 88061	9093, 94596
437	20, 90454	9135, 28398
438	20, 92845	9166, 66110
439	20, 95233	9198, 07287
440	20, 97618	9229, 51920
441	21, 00000	9261, 00000
442	21, 02380	9292, 51960
443	21, 04756	9324, 06908
444	21, 07131	9355, 66164
445	21, 09502	9387, 28390
446	21, 11871	9418, 94466
447	21, 14237	9450, 63939
448	21, 16601	9482, 37248
449	21, 18962	9514, 13938
450	21, 21320	9545, 94000
451	21, 23676	9577, 77876
452	21, 26029	9609, 65108
453	21, 28380	9641, 56140
454	21, 30727	9673, 50058
455	21, 33073	9705, 48215
456	21, 35416	9737, 49696
457	21, 37756	9799, 54492
458	21, 40093	9801, 62594
459	21, 42428	9833, 74452
460	21, 44761	9865, 90060
461	21, 47091	9898, 08951
462	21, 49418	9930, 31116
463	21, 51743	9962, 57009
464	21, 54066	9994, 86624
465	21, 56386	10027, 19490
466	21, 58703	10059, 55598
467	21, 61018	10091, 95405

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
468	21, 63331	10124, 38908
469	21, 65641	10156, 85629
470	21, 67948	10189, 35560
471	21, 70253	10221, 89163
472	21, 72556	10254, 46432
473	21, 74856	10287, 06888
474	21, 77154	10319, 70996
475	21, 79449	10352, 38275
476	21, 81742	10385, 09192
477	21, 84033	10417, 83741
478	21, 86321	10450, 61438
479	21, 88607	10483, 42753
480	21, 90890	10516, 27200
481	21, 93171	10549, 15251
482	21, 95450	10582, 06900
483	21, 97726	10615, 01658
484	22, 00000	10648, 00000
485	22, 02271	10681, 01435
486	22, 04541	10714, 06926
487	22, 06808	10747, 15496
488	22, 09072	10780, 27136
489	22, 11334	10813, 42326
490	22, 13594	10846, 61060
491	22, 15852	10879, 83332
492	22, 18107	10913, 08644
493	22, 20360	10946, 37480
494	22, 22611	10979, 69834
495	22, 24859	11013, 05205
496	22, 27106	11046, 44576
497	22, 29350	11079, 86950
498	22, 31591	11113, 32318
499	22, 33831	11146, 81669
500	22, 36068	11180, 34000
501	22, 38303	11213, 89803

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
502	22, 40536	11247, 49072
503	22, 42766	11281, 11298
504	22, 44994	11314, 76976
505	22, 47220	11348, 46100
506	22, 49444	11382, 18664
507	22, 51666	11415, 94662
508	22, 53885	11449, 73580
509	22, 56103	11483, 56427
510	22, 58318	11517, 42180
511	22, 60531	11551, 31341
512	22, 62742	11585, 23904
513	22, 64950	11619, 19350
514	22, 67157	11653, 18698
515	22, 69361	11687, 20915
516	22, 71563	11721, 26508
517	22, 73763	11755, 35471
518	22, 75961	11789, 47798
519	22, 78157	11823, 63483
520	22, 80351	11857, 82520
521	22, 82542	11892, 04382
522	22, 84732	11926, 30104
523	22, 86919	11960, 58637
524	22, 89105	11994, 91020
525	22, 91288	12029, 26200
526	22, 93469	12063, 64694
527	22, 95649	12090, 07023
528	22, 97825	12132, 51600
529	23, 00000	12167, 00000
530	23, 02173	12201, 51690
531	23, 04344	12236, 06664
532	23, 06512	12270, 64384
533	23, 08679	12305, 25907
534	23, 10844	12339, 90696
535	23, 13007	12374, 58745

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
536	23, 15167	12409, 29512
537	23, 17326	12444, 04062
538	23, 19483	12478, 81854
539	23, 21637	12513, 62333
540	23, 23790	12548, 46600
541	23, 25941	12583, 34081
542	23, 28089	12618, 24238
543	23, 30236	12653, 18148
544	23, 32381	12688, 15264
545	23, 34523	12723, 15035
546	23, 36664	12758, 18544
547	23, 38803	12793, 25241
548	23, 40940	12828, 35120
549	23, 43075	12863, 48175
550	23, 45208	12898, 64400
551	23, 47339	12933, 83789
552	23, 49468	12969, 06336
553	23, 51595	13004, 32035
554	23, 53720	13039, 60880
555	23, 55844	13074, 93420
556	23, 57965	13110, 28540
557	23, 60085	13145, 67345
558	23, 62002	13179, 97116
559	23, 64318	13216, 53762
560	23, 66432	13252, 00920
561	23, 68544	13287, 53184
562	23, 70654	13323, 07548
563	23, 72762	13358, 65006
564	23, 74868	13394, 25552
565	23, 76972	13429, 89180
566	23, 79075	13465, 56450
567	23, 81176	13501, 26792
568	23, 83275	13537, 00200
569	23, 85372	13572, 76668

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
570	23, 87462	13608, 53340
571	23, 89561	13644, 39331
572	23, 91652	13680, 24944
573	23, 93742	13716, 14166
574	23, 95830	13752, 06420
575	23, 97916	13788, 01700
576	24, 00000	13824, 00000
577	24, 02082	13860, 01314
578	24, 04163	13896, 06214
579	24, 06242	13932, 14118
580	24, 08319	13968, 25020
581	24, 10394	14004, 38914
582	24, 12468	14040, 56376
583	24, 14539	14076, 76237
584	24, 16609	14112, 99656
585	24, 18677	14149, 26045
586	24, 20744	14185, 55984
587	24, 22808	14221, 88296
588	24, 24871	14258, 24148
589	24, 26932	14294, 62948
590	24, 28991	14331, 04690
591	24, 31049	14367, 49959
592	24, 33105	14403, 98160
593	24, 35159	14440, 49287
594	24, 37211	14477, 03334
595	24, 39262	14513, 60890
596	24, 41311	14550, 21356
597	24, 43358	14586, 84726
598	24, 45404	14623, 51592
599	24, 47448	14660, 21352
600	24, 49490	14696, 94000
601	24, 51530	14733, 69530
602	24, 53569	14770, 48538
603	24, 55606	14807, 30418

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
604	24, 57641	14844, 15164
605	24, 59675	14881, 03375
606	24, 61707	14917, 94442
607	24, 63737	14954, 88359
608	24, 65766	14991, 85728
609	24, 67792	15028, 95328
610	24, 69818	15065, 88980
611	24, 71841	15002, 94851
612	24, 73863	15140, 04156
613	24, 75884	15177, 16892
614	24, 77902	15214, 31828
615	24, 79919	15251, 50185
616	24, 81935	15288, 71960
617	24, 83948	15325, 95916
618	24, 85960	15363, 23280
619	24, 87971	15400, 54049
620	24, 89980	15437, 87600
621	24, 91987	15475, 23927
622	24, 93993	15512, 63646
623	24, 95997	15550, 06131
624	24, 97999	15587, 51376
625	25, 00000	15625, 00000
626	25, 01999	15662, 51374
627	25, 03997	15700, 06119
628	25, 05993	15737, 63604
629	25, 07987	15775, 23823
630	25, 09980	15812, 87400
631	25, 11971	15850, 53701
632	25, 13961	15888, 23352
633	25, 15949	15925, 95717
634	25, 17936	15963, 71424
635	25, 19920	16001, 49200
636	25, 21904	16039, 30944
637	25, 23886	16077, 15382

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
638	25, 25866	16115, 02508
639	25, 27845	16152, 92955
640	25, 29822	16190, 86080
641	25, 31798	16228, 82518
642	25, 33772	16268, 81624
643	25, 35744	16304, 83392
644	25, 37715	16342, 88460
645	25, 39685	16380, 96825
646	25, 41653	16419, 07838
647	25, 43619	16457, 21493
648	25, 45584	16495, 38432
649	25, 47548	16533, 58652
650	25, 49510	16571, 81500
651	25, 51470	16610, 06970
652	25, 53429	16648, 35708
653	25, 55386	16686, 67058
654	25, 57342	16725, 01668
655	25, 59297	16763, 39535
656	25, 61250	16801, 80000
657	25, 63201	16840, 23057
658	25, 65151	16878, 69358
659	25, 67099	16917, 18241
660	25, 69046	16955, 70360
661	25, 70992	16994, 25712
662	25, 72936	17032, 83632
663	25, 74879	17071, 44777
664	25, 76820	17110, 08480
665	25, 78759	17148, 74735
666	25, 80697	17187, 44202
667	25, 82634	17226, 16878
668	25, 84569	17264, 92092
669	25, 86503	17303, 70507
670	25, 88436	17342, 52120
671	25, 90367	17381, 36257

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
672	25, 92296	17420, 22912
673	25, 94224	17459, 12752
674	25, 97151	17504, 79774
675	25, 98076	17537, 01300
676	26, 00000	17576, 00000
677	26, 01922	17615, 01194
678	26, 03843	17654, 05554
679	26, 05763	17693, 13077
680	26, 07681	17732, 23080
681	26, 09598	17771, 36238
682	26, 11513	17810, 51866
683	26, 13427	17849, 70641
684	26, 15339	17888, 91876
685	26, 17250	17928, 16250
686	26, 19160	17967, 43760
687	26, 21068	18006, 73716
688	26, 22975	18046, 06800
689	26, 24881	18085, 43009
690	26, 26785	18124, 81650
691	26, 28688	18164, 23408
692	26, 30589	18203, 67588
693	26, 32489	18243, 14877
694	26, 34388	18282, 65272
695	26, 36285	18322, 18075
696	26, 38181	18361, 73976
697	26, 40076	18401, 32872
698	26, 41969	18440, 94362
699	26, 43861	18480, 58839
700	26, 45751	18520, 25700
701	26, 47640	18559, 95640
702	26, 49528	18599, 68656
703	26, 51415	18639, 44745
704	26, 53300	18679, 23200
705	26, 55184	18719, 04720

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
706	26, 57066	18758, 88596
707	26, 58947	18798, 75529
708	26, 60827	18838, 65516
709	26, 62705	18878, 57845
710	26, 64582	18918, 53220
711	26, 66458	18958, 51638
712	26, 68333	18998, 53096
713	26, 70206	19038, 56878
714	26, 72078	19078, 63692
715	26, 73948	19118, 72820
716	26, 75818	19158, 85688
717	26, 77685	19199, 00145
718	26, 79552	19239, 18336
719	26, 81417	19279, 38823
720	26, 83281	19319, 62320
721	26, 85144	19359, 88824
722	26, 87006	19400, 18332
723	26, 88866	19440, 50118
724	26, 90725	19480, 84900
725	26, 92582	19521, 21950
726	26, 94439	19561, 62714
727	26, 96294	19602, 05738
728	26, 98147	19642, 51016
729	27, 00000	19683, 00000
730	27, 01851	19723, 51230
731	27, 03701	19764, 05431
732	27, 05550	19804, 62600
733	27, 07397	19845, 22001
734	27, 09243	19885, 84362
735	27, 11088	19926, 49680
736	27, 12932	19967, 17952
737	27, 14774	20007, 88438
738	27, 16615	20048, 61870
739	27, 18455	20089, 38245

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
740	27, 20294	20130, 17560
741	27, 22131	20170, 99071
742	27, 23968	20211, 84256
743	27, 25803	20252, 71629
744	27, 27636	20293, 61184
745	27, 29469	20334, 54405
746	27, 31300	20375, 49800
747	27, 33130	20416, 48110
748	27, 34959	20457, 49332
749	27, 36786	20498, 52714
750	27, 38613	20539, 59750
751	27, 40438	20580, 68938
752	27, 42262	20621, 81024
753	27, 44084	20662, 95252
754	27, 45906	20704, 13124
755	27, 47726	20745, 33130
756	27, 49545	20786, 56020
757	27, 51363	20827, 81791
758	27, 53180	20869, 10440
759	27, 54995	20910, 41205
760	27, 56810	20951, 75600
761	27, 58623	20993, 12103
762	27, 60435	21034, 51470
763	27, 62245	21075, 92935
764	27, 64055	21117, 38020
765	27, 65863	21158, 85195
766	27, 67670	21200, 35220
767	27, 69476	21241, 88092
768	27, 71281	21283, 43808
769	27, 73085	21325, 02365
770	27, 74887	21366, 62990
771	27, 76689	21408, 27219
772	27, 78489	21449, 93508
773	27, 80288	21491, 62624

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
774	27, 82085	21533, 33790
775	27, 83882	21575, 08550
776	27, 85678	21616, 86128
777	27, 87472	21658, 65744
778	27, 89265	21700, 48170
779	27, 91057	21742, 33403
780	27, 92848	21784, 21440
781	27, 94638	21826, 12278
782	27, 96426	21868, 05132
783	27, 98214	21910, 01562
784	28, 00000	21952, 00000
785	28, 01785	21994, 01225
786	28, 03569	22036, 05234
787	28, 05352	22078, 12024
788	28, 07134	22120, 21592
789	28, 08914	22162, 33146
790	28, 10694	22204, 48260
791	28, 12472	22246, 65352
792	28, 14249	22288, 85108
793	28, 16025	22331, 07825
794	28, 17800	22373, 33200
795	28, 19574	22415, 61330
796	28, 21347	22457, 92212
797	28, 23119	22500, 25843
798	28, 24889	22542, 61422
799	28, 26659	22585, 00541
800	28, 28427	22627, 41600
801	28, 30194	22669, 85394
802	28, 31960	22712, 31900
803	28, 33725	22754, 81175
804	28, 35489	22797, 33156
805	28, 37252	22839, 87860
806	28, 39014	22882, 45184
807	28, 40774	22925, 04618

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
808	28, 42534	22967, 67472
809	28, 44292	23010, 32228
810	28, 46050	23053, 00500
811	28, 47806	23095, 70666
812	28, 49561	23138, 43532
813	28, 51315	23181, 19095
814	28, 53068	23223, 97352
815	28, 54820	23266, 78300
816	28, 56571	23309, 61936
817	28, 58321	23352, 48257
818	28, 60070	23395, 37260
819	28, 61818	23438, 28942
820	28, 63564	23481, 22480
821	28, 65310	23524, 19510
822	28, 67054	23567, 18388
823	28, 68798	23610, 20754
824	28, 70540	23653, 24960
825	28, 72281	23696, 31825
826	28, 74021	23734, 41346
827	28, 75761	23782, 54347
828	28, 77499	23825, 69172
829	28, 79236	23868, 86644
830	28, 80972	23912, 06760
831	28, 82707	23955, 29517
832	28, 84441	23998, 54912
833	28, 86174	24041, 82942
834	28, 87906	24085, 13604
835	28, 89637	24128, 46895
836	28, 91366	24171, 82076
837	28, 93095	24225, 20515
838	28, 94823	24258, 61674
839	28, 96550	24302, 05450
840	28, 98275	24345, 51000
841	29, 00000	24389, 00000

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
842	29, 01724	24432, 51608
843	29, 03446	24476, 04978
844	29, 05168	24519, 61792
845	29, 06888	24563, 20360
846	29, 08608	24606, 82368
847	29, 10326	24650, 46122
848	29, 12044	24694, 13312
849	29, 13760	24737, 82240
850	29, 15476	24781, 54600
851	29, 17190	24825, 28690
852	29, 18904	24869, 06208
853	29, 20616	24912, 85448
854	29, 22328	24956, 68112
855	29, 24038	25000, 50490
856	29, 25748	25044, 40288
857	29, 27456	25088, 29792
858	29, 29164	25132, 22712
859	29, 30870	25176, 17330
860	29, 32576	25220, 15360
861	29, 34280	25264, 15080
862	29, 35984	25308, 18208
863	29, 37686	25352, 23018
864	29, 39388	25396, 31232
865	29, 41088	25440, 41120
866	29, 42788	25484, 54408
867	29, 44486	25528, 69362
868	29, 46184	25572, 87712
869	29, 47880	25617, 07720
870	29, 49576	25661, 31120
871	29, 51271	25705, 57041
872	29, 52965	25749, 85480
873	29, 54657	25794, 15561
874	29, 56349	25838, 49026
875	29, 58040	25882, 85000

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
876	29, 59730	25927, 23480
877	29, 61419	25971, 64463
878	29, 63106	26016, 07068
879	29, 64793	26060, 53047
880	29, 66479	26105, 01520
881	29, 68164	26149, 52484
882	29, 69848	26194, 05936
883	29, 71532	26238, 62756
884	29, 73214	26283, 21176
885	29, 74895	26327, 82075
886	29, 76575	26372, 45450
887	29, 78254	26417, 11298
888	29, 79933	26461, 80504
889	29, 81610	26506, 51290
890	29, 83287	26551, 25430
891	29, 84962	26596, 01142
892	29, 86637	26640, 80204
893	29, 88311	26685, 61723
894	29, 89983	26730, 44802
895	29, 91655	26775, 31225
896	29, 93326	26820, 20096
897	29, 94996	26865, 11412
898	29, 96665	26910, 05170
899	29, 98333	26955, 01367
900	30, 00000	27000, 00000
901	30, 01666	27045, 01066
902	30, 03331	27090, 04562
903	30, 04996	27135, 11388
904	30, 06659	27180, 19736
905	30, 08322	27225, 31410
906	30, 09983	27270, 44598
907	30, 11644	27315, 61108
908	30, 13304	27360, 80032
909	30, 14963	27406, 01367

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
910	30, 16621	27451, 25110
911	30, 18278	27496, 51258
912	30, 19934	27541, 79808
913	30, 21589	27587, 10757
914	30, 23243	27632, 44102
915	30, 24897	27677, 80755
916	30, 26549	27723, 18884
917	30, 28201	27768, 60317
918	30, 29851	27814, 03218
919	30, 31501	27859, 49419
920	30, 33150	27904, 98000
921	30, 34798	27950, 48958
922	30, 36495	27996, 48390
923	30, 38091	28041, 57993
924	30, 39737	28087, 16988
925	30, 41381	28132, 77425
926	30, 43025	28178, 41150
927	30, 44667	28224, 06309
928	30, 46309	28269, 74752
929	30, 47950	28315, 45550
930	30, 49590	28361, 18700
931	30, 51229	28406, 94199
932	30, 52867	28452, 72044
933	30, 54505	28498, 53165
934	30, 56141	28544, 35694
935	30, 57777	28590, 21495
936	30, 59412	28635, 09632
937	30, 61046	28682, 00102
938	30, 62679	28727, 92902
939	30, 64311	28773, 88039
940	30, 65942	28819, 85480
941	30, 67572	28865, 85252
942	30, 69202	28911, 88284
943	30, 70831	28957, 93633

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
944	30, 72458	29004, 00352
945	30, 74085	29050, 10325
946	30, 75711	29096, 22606
947	30, 77336	29142, 37192
948	30, 78961	29188, 55028
948	30, 80584	29234, 74216
950	30, 82207	29280, 96650
951	30, 83829	29327, 21379
952	30, 85450	29373, 48400
953	30, 87070	29419, 77710
954	30, 88689	29466, 06444
955	30, 90307	29512, 43185
956	30, 91925	29558, 80300
957	30, 93542	29605, 19694
958	30, 95157	29651, 60406
959	30, 96772	29698, 04348
960	30, 98387	29744, 51520
961	31, 00000	29791, 00000
962	31, 01612	29837, 50744
963	31, 02224	29874, 41712
964	31, 04835	29930, 60940
965	31, 06445	29977, 19425
966	31, 08054	30023, 80164
967	31, 09662	30070, 43154
968	31, 11270	30117, 09360
969	31, 12876	30163, 76844
970	31, 14482	30210, 47540
971	31, 16087	30257, 20477
972	31, 17691	30303, 95652
973	31, 19295	30350, 71035
974	31, 20897	30397, 53678
975	31, 22499	30444, 36525
976	31, 24100	30491, 21600
977	31, 25700	30538, 08900

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
978	31, 27300	30584, 99400
979	31, 28898	30631, 91142
980	31, 30495	30678, 85100
981	31, 32092	30725, 82252
982	31, 33688	30788, 47906
983	31, 35283	30819, 83189
984	31, 36877	30866, 86968
985	31, 38471	30913, 93935
986	31, 40064	30961, 03104
987	31, 41656	31008, 14472
988	31, 43248	31055, 29024
989	31, 44837	31102, 43793
990	31, 46427	31149, 62730
991	31, 48015	31196, 82865
992	31, 49603	31244, 06176
993	31, 51190	31291, 31670
994	31, 52777	31338, 60338
995	31, 54362	31385, 90190
996	31, 55947	31433, 23212
997	31, 57531	31480, 58407
998	31, 59114	31527, 95772
999	31, 60696	31575, 35304
1000	31, 62278	31622, 78000
1001	31, 63858	31670, 21858
1002	31, 65438	31717, 68876
1003	31, 67017	31765, 18051
1004	31, 68596	31812, 70384
1005	31, 70173	31860, 23865
1006	31, 71750	31907, 80500
1007	31, 73326	31955, 39282
1008	31, 74901	32003, 00208
1009	31, 76476	32050, 64284
1010	31, 78050	32098, 30500
1011	31, 79623	32145, 98853

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1012	31, 81195	32193, 69340
1013	31, 82766	32241, 41958
1014	31, 84337	32289, 17718
1015	31, 85906	32336, 94590
1016	31, 87475	32384, 74600
1017	31, 89044	32432, 57748
1018	31, 90611	32480, 41998
1019	31, 92178	32528, 29382
1020	31, 93744	32576, 18880
1021	31, 95309	32624, 10489
1022	31, 96873	32672, 04206
1023	31, 98437	32720, 01051
1024	32, 00000	32768, 00000
1025	32, 01562	32816, 01050
1026	32, 03123	32864, 04198
1027	32, 04684	32912, 10468
1028	32, 06244	32960, 18832
1029	32, 07803	33008, 29287
1030	32, 09361	33056, 41830
1031	32, 10919	33104, 57489
1032	32, 12476	33152, 75232
1033	32, 14032	33200, 95056
1034	32, 15587	33249, 16958
1035	32, 17141	33297, 40935
1036	32, 18695	33345, 68020
1037	32, 20248	33393, 97176
1038	32, 21801	33442, 29438
1039	32, 23352	33490, 62728
1040	32, 24903	33538, 99120
1041	32, 26453	33587, 37573
1042	32, 28002	33635, 78084
1043	32, 29551	33684, 21693
1044	32, 31099	33732, 67356
1045	32, 32646	33781, 15070

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1046	32, 34192	33829, 64832
1047	32, 35738	33878, 17086
1048	32, 37283	33926, 72584
1049	32, 38827	33975, 29523
1050	32, 40370	34023, 88500
1051	32, 41913	34072, 50563
1052	32, 43455	34121, 14660
1053	32, 44996	34169, 80788
1054	32, 46537	34218, 49998
1055	32, 48092	34267, 37060
1056	32, 49615	34315, 93440
1057	32, 51154	34364, 69778
1058	32, 52691	34413, 47078
1059	32, 54151	34461, 45909
1060	32, 55764	34511, 09840
1061	32, 57299	34559, 94239
1062	32, 58834	34608, 81708
1063	32, 60368	34657, 71184
1064	32, 61901	34706, 62664
1065	32, 63434	34755, 57210
1066	32, 64965	34804, 52690
1067	32, 66497	34853, 52299
1068	32, 68027	34902, 52836
1069	32, 69557	34951, 52833
1070	32, 71085	35000, 60950
1071	32, 72614	35049, 69594
1072	32, 74141	35098, 79152
1073	32, 75668	35147, 91764
1074	32, 77194	35197, 06356
1075	32, 78719	35246, 22925
1076	32, 80243	35295, 41468
1077	32, 81768	35344, 74136
1078	32, 83291	35393, 87698
1079	32, 84813	35443, 13227

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1080	32, 86335	35492, 41800
1081	32, 87856	35541, 72336
1082	32, 89377	35591, 05914
1083	32, 90896	35640, 40368
1084	32, 92415	35689, 77860
1085	32, 93933	35739, 17305
1086	32, 95451	35788, 59786
1087	32, 96968	35838, 04216
1088	32, 98484	35887, 50592
1089	33, 00000	35937, 00000
1090	33, 01515	35986, 51350
1091	33, 03029	36036, 04639
1092	33, 04542	36085, 59864
1093	33, 06055	36135, 18115
1094	33, 07567	36184, 78298
1095	33, 09078	36234, 40410
1096	33, 10589	36284, 05544
1097	33, 12099	36333, 72603
1098	33, 13608	36383, 41584
1099	33, 15117	36433, 13583
1100	33, 16625	36482, 87500
1101	33, 18132	36532, 63332
1102	33, 19638	36582, 41076
1103	33, 21144	36632, 21832
1104	33, 22649	36682, 04496
1105	33, 24154	36731, 90170
1106	33, 25658	36781, 77748
1107	33, 27161	36831, 67227
1108	33, 28663	36881, 58604
1109	33, 30165	36931, 52985
1110	33, 31666	36981, 49260
1111	33, 33167	37031, 48537
1112	33, 34666	37081, 48592
1113	33, 36165	37131, 41645

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1114	33, 37664	37181, 57696
1115	33, 39161	37231, 64515
1116	33, 40659	37281, 75444
1117	33, 42155	37331, 87135
1118	33, 43650	37382, 00700
1119	33, 45146	37432, 18374
1120	33, 46640	37482, 36800
1121	33, 48134	37532, 58214
1122	33, 49627	37582, 81494
1123	33, 51192	37633, 88616
1124	33, 52611	37683, 34764
1125	33, 54102	37733, 64750
1126	33, 55592	37783, 96592
1127	33, 57082	37834, 31414
1128	33, 58571	37884, 68088
1129	33, 60059	37935, 06611
1130	33, 61547	37985, 48110
1131	33, 63034	38035, 91454
1132	33, 64521	38086, 37772
1133	33, 66006	38136, 84798
1134	33, 67492	38187, 35928
1135	33, 68976	38237, 87760
1136	33, 70460	38288, 42560
1137	33, 71943	38338, 99191
1138	33, 73425	38389, 57650
1139	33, 74907	38440, 19073
1140	33, 76289	38489, 69460
1141	33, 77869	38541, 48529
1142	33, 79349	38592, 16558
1143	33, 80828	38642, 86404
1144	33, 82307	38693, 59208
1145	33, 83799	38744, 49859
1146	33, 85262	38795, 10252
1147	33, 86739	38845, 89633

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1148	33, 88215	38896, 70820
1149	33, 89690	38947, 53810
1150	33, 91165	38998, 39750
1151	33, 92639	39049, 27489
1152	33, 94112	39100, 17024
1153	33, 95585	39151, 09505
1154	33, 97057	39202, 03778
1155	33, 98544	39253, 18320
1156	34, 00000	39304, 00000
1157	34, 01485	39355, 18145
1158	34, 02940	39406, 04520
1159	34, 04409	39457, 10031
1160	34, 05877	39508, 17320
1161	34, 07345	39559, 27545
1162	34, 08812	39610, 39544
1163	34, 10278	39661, 53314
1164	34, 11744	39712, 70016
1165	34, 13210	39763, 89650
1166	34, 14674	39815, 09884
1167	34, 16138	39866, 33046
1168	34, 17601	39917, 57968
1169	34, 19064	39968, 85816
1170	34, 20526	40020, 15420
1171	34, 21988	40071, 47948
1172	34, 23448	40122, 81056
1173	34, 24909	40174, 18257
1174	34, 26368	40225, 56032
1175	34, 27827	40276, 96725
1176	34, 29286	40328, 40336
1177	34, 30743	40379, 84511
1178	34, 32200	40431, 31600
1179	34, 33657	40482, 81603
1180	34, 35113	40534, 33340
1181	34, 36568	40585, 86808

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1182	34, 38023	40637, 43186
1183	34, 39477	40689, 01291
1184	34, 40930	40740, 61120
1185	34, 42383	40792, 23855
1186	34, 43835	40842, 88310
1187	34, 45287	40895, 55669
1188	34, 46737	40947, 23556
1189	34, 48188	40998, 95532
1190	34, 49638	41050, 69220
1191	34, 51087	41102, 44617
1192	34, 52535	41154, 21720
1193	34, 53983	41206, 01719
1194	34, 55430	41257, 83420
1195	34, 56877	41309, 68015
1196	34, 58323	41361, 54308
1197	34, 59769	41413, 43493
1198	34, 61214	41465, 34372
1199	34, 62658	41517, 26942
1200	34, 64102	41569, 22400
1201	34, 65545	41621, 19545
1202	34, 66987	41673, 18374
1203	34, 68429	41725, 20087
1204	34, 69870	41777, 23480
1205	34, 71311	41829, 29755
1206	34, 72751	41881, 37706
1207	34, 74191	41933, 48537
1208	34, 75629	41985, 59832
1209	34, 77068	42037, 85212
1210	34, 78505	42089, 91050
1211	34, 79942	42142, 09762
1212	34, 81379	42194, 31348
1213	34, 82815	42246, 54595
1214	34, 84250	42298, 79500
1215	34, 85685	42350, 07275

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1216	34, 87119	42403, 36704
1217	34, 88554	42455, 70218
1218	34, 89986	42508, 02948
1219	34, 91418	42560, 38542
1220	34, 92850	42612, 77000
1221	34, 94281	42665, 17101
1222	34, 95712	42717, 60064
1223	34, 97142	42770, 04666
1224	34, 98571	42822, 50904
1225	35, 00000	42875, 00000
1226	35, 01428	42927, 50728
1227	35, 02856	42980, 04312
1228	35, 04283	43032, 59524
1229	35, 05709	43085, 16361
1230	35, 07135	43137, 76050
1231	35, 08561	43190, 38591
1232	35, 09986	43243, 02752
1233	35, 11410	43295, 68530
1234	35, 12834	43348, 37156
1235	35, 14257	43401, 07395
1236	35, 15679	43453, 79244
1237	35, 17101	43506, 53937
1238	35, 18522	43559, 30236
1239	35, 19943	43612, 09377
1240	35, 21363	43664, 90120
1241	35, 22783	43717, 73703
1242	35, 24202	43770, 58884
1243	35, 25621	43823, 46903
1244	35, 27038	43876, 35272
1245	35, 28456	43929, 27720
1246	35, 29872	43982, 20512
1247	35, 31289	44035, 17383
1248	35, 32704	44088, 14592
1249	35, 34119	44141, 14631

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1250	35, 35534	44194, 17500
1251	35, 36948	44247, 21948
1252	35, 38361	44300, 27972
1253	35, 39774	44353, 36822
1254	35, 41186	44406, 47244
1255	35, 42598	44459, 60490
1256	35, 44009	44512, 75304
1257	35, 45419	44565, 91683
1258	35, 46829	44619, 10882
1259	35, 48239	44672, 32901
1260	35, 49648	44725, 56480
1261	35, 51056	44778, 81616
1262	35, 52464	44832, 09568
1263	35, 53871	44885, 39073
1264	35, 55278	45938, 71392
1265	35, 56684	44992, 05260
1266	35, 58089	45045, 40674
1267	35, 59494	45098, 78898
1268	35, 60899	45152, 19932
1269	35, 62303	45205, 62507
1270	35, 63706	45259, 06620
1271	35, 65011	45311, 28981
1272	35, 66511	45366, 01992
1273	35, 67912	45419, 51976
1274	35, 69314	45473, 06036
1275	35, 70714	45526, 60350
1276	35, 72114	45580, 17464
1277	35, 73514	45633, 77378
1278	35, 74912	45687, 37536
1279	35, 76311	45741, 01769
1280	35, 77709	45791, 67520
1281	35, 79106	45848, 34786
1282	35, 80503	45902, 04846
1283	35, 81899	45955, 76417

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1284	35, 83294	46009, 49496
1285	35, 84690	46063, 26650
1286	35, 86084	46117, 04024
1287	35, 87478	46170, 84186
1288	35, 88872	46224, 67136
1289	35, 90265	46278, 51585
1290	35, 91657	46332, 37530
1291	35, 93049	46386, 26259
1292	35, 94440	46440, 16480
1293	35, 95831	46494, 09483
1294	35, 97221	46548, 03974
1295	35, 98611	46602, 01215
1296	36, 00000	46656, 00000
1297	36, 01389	46710, 01533
1298	36, 02777	46764, 04546
1299	36, 04164	46818, 09036
1300	36, 05551	46872, 16300
1301	36, 06938	46926, 26338
1302	36, 08324	46980, 37848
1303	36, 09709	47034, 50827
1304	36, 11094	47088, 66576
1305	36, 12478	47142, 83790
1306	36, 13862	47197, 03772
1307	36, 15245	47251, 25215
1308	36, 16628	47305, 49424
1309	36, 18010	47359, 75090
1310	36, 19392	47414, 03520
1311	36, 20773	47468, 33403
1312	36, 22154	47522, 66048
1313	36, 23534	47577, 00142
1314	36, 24914	47631, 36996
1315	36, 26293	47685, 75295
1316	36, 27671	47740, 15036
1317	36, 29049	47794, 57533

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1318	36, 30427	47849, 02786
1319	36, 31804	47903, 49476
1320	36, 33180	47957, 97600
1321	36, 34556	48012, 48476
1322	36, 35932	48067, 02104
1323	36, 37307	48121, 57161
1324	36, 38681	48176, 13644
1325	36, 40055	48230, 72875
1326	36, 41428	48285, 33528
1327	36, 42801	48339, 96927
1328	36, 44173	48394, 61744
1329	36, 45545	48449, 29305
1330	36, 46916	48503, 98280
1331	36, 48287	48558, 69997
1332	36, 49657	48613, 43124
1333	36, 51027	48668, 18991
1334	36, 52396	48722, 96264
1335	36, 53765	48777, 76275
1336	36, 55133	48832, 57688
1337	36, 56501	48887, 41837
1338	36, 57867	48942, 26046
1339	36, 59235	48997, 15665
1340	36, 60601	49052, 05340
1341	36, 61967	49106, 97747
1342	36, 63303	49161, 52626
1343	36, 64696	49216, 86728
1344	36, 66060	49271, 84640
1345	36, 67424	49326, 85280
1346	36, 68787	49381, 87302
1347	36, 70150	49436, 92050
1348	36, 71512	49491, 98176
1349	36, 72873	49547, 05677
1350	36, 74235	49602, 17250
1351	36, 75595	49657, 28845

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1352	36, 76955	49712, 43160
1353	36, 78315	49767, 60195
1354	36, 79675	49822, 79950
1355	36, 81032	49877, 98360
1356	36, 82390	49933, 20840
1357	36, 83748	49988, 46036
1358	36, 85105	50043, 72590
1359	36, 86462	50099, 01858
1360	36, 87818	50154, 32480
1361	36, 89173	50209, 64453
1362	36, 90528	50264, 99136
1363	36, 91883	50320, 36529
1364	36, 93237	50375, 75268
1365	36, 94591	50431, 16715
1366	36, 95943	50486, 58138
1367	36, 97296	50542, 03632
1368	36, 98648	50597, 50464
1369	37, 00000	50653, 00000
1370	37, 01351	50708, 50870
1371	37, 02701	50764, 03071
1372	37, 04052	50819, 59344
1373	37, 05401	50875, 15573
1374	37, 06750	50930, 74500
1375	37, 08099	50986, 36125
1376	37, 09447	51041, 99072
1377	37, 10795	51097, 64715
1378	37, 12142	51153, 31676
1379	37, 13489	51209, 01331
1380	37, 14835	51264, 72300
1381	37, 16181	51320, 45961
1382	37, 17526	51376, 20932
1383	37, 18871	51431, 98593
1384	37, 20215	51487, 77560
1385	37, 21559	51543, 59215

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1386	37, 22902	51599, 42172
1387	37, 24245	51655, 27815
1388	37, 25587	51711, 14756
1389	37, 26929	51767, 04381
1390	37, 28271	51822, 96690
1391	37, 29610	51878, 87510
1392	37, 30952	51934, 85184
1393	37, 32291	51990, 81363
1394	37, 33631	52046, 81614
1395	37, 34970	52102, 83150
1396	37, 36308	52158, 85968
1397	37, 37646	52214, 91462
1398	37, 38983	52270, 98234
1399	37, 40321	52327, 09079
1400	37, 41657	52383, 19800
1401	37, 42993	52439, 33193
1402	37, 44329	52495, 49258
1403	37, 45664	52551, 66592
1404	37, 46999	52607, 76596
1405	37, 48333	52664, 07865
1406	37, 49667	52720, 31802
1407	37, 51000	52776, 57000
1408	37, 52333	52832, 84864
1409	37, 53665	52889, 13985
1410	37, 54996	52945, 44360
1411	37, 56328	53001, 78808
1412	37, 57659	53058, 14508
1413	37, 58990	53114, 52870
1414	37, 60319	53170, 91066
1415	37, 61649	53227, 33335
1416	37, 62977	53283, 75432
1417	37, 64306	53340, 21602
1418	37, 65634	53396, 69012
1419	37, 66962	53453, 19078

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1420	37, 68289	53509, 70380
1421	37, 69615	53566, 22915
1422	37, 70941	53622, 78102
1423	37, 72267	53679, 35941
1424	37, 73592	53735, 95008
1425	37, 74917	53792, 56725
1426	37, 76241	53849, 19666
1427	37, 77565	53905, 85255
1428	37, 78889	53962, 53492
1429	37, 80212	54019, 22948
1430	37, 81634	54077, 36620
1431	37, 82856	54132, 66936
1432	37, 84177	54189, 41464
1433	37, 85499	54246, 20067
1434	37, 86819	54302, 98446
1435	37, 88139	54359, 79465
1436	37, 89459	54416, 63124
1437	37, 90778	54473, 47986
1438	37, 92097	54530, 35486
1439	37, 93415	54587, 24185
1440	37, 94733	54644, 15520
1441	37, 96051	54701, 09491
1442	37, 97367	54758, 03214
1443	37, 98684	54815, 01012
1444	38, 00000	54872, 00000
1445	38, 01316	54929, 01620
1446	38, 02631	54986, 04426
1447	38, 03945	55043, 08415
1448	38, 05259	55100, 15032
1449	38, 06573	55157, 24277
1450	38, 07886	55214, 34700
1451	38, 09199	55271, 47749
1452	38, 10512	55328, 63424
1453	38, 11824	55385, 80272

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1454	38, 13135	55442, 98290
1455	38, 14446	55500, 18930
1456	38, 15757	55557, 42192
1457	38, 17067	55614, 66619
1458	38, 18377	55671, 93666
1459	38, 19686	55729, 21874
1460	38, 20995	55786, 52700
1461	38, 22303	55843, 84683
1462	38, 23611	55901, 19282
1463	38, 24918	55958, 55034
1464	38, 26225	56015, 93400
1465	38, 27532	56073, 34380
1466	38, 28838	56130, 76508
1467	38, 30143	56188, 19781
1468	38, 31449	56245, 67132
1469	38, 32753	56303, 14157
1470	38, 34058	56360, 65260
1471	38, 35362	56418, 17502
1472	38, 36665	56475, 70880
1473	38, 37968	56533, 26864
1474	38, 39271	56590, 85454
1475	38, 40573	56648, 45175
1476	38, 41874	56706, 06024
1477	38, 43176	56763, 70952
1478	38, 44476	56821, 35528
1479	38, 45777	56879, 04183
1480	38, 47077	56936, 73960
1481	38, 48376	56994, 44856
1482	38, 49675	57052, 18350
1483	38, 50973	57109, 92959
1484	38, 52272	57167, 71648
1485	38, 53570	57225, 51450
1486	38, 54867	57283, 32362
1487	38, 56164	57341, 15768

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1488	38, 57460	57399, 00480
1489	38, 58756	57456, 87684
1490	38, 60052	57514, 77480
1491	38, 61347	57572, 68377
1492	38, 62641	57630, 60372
1493	38, 63936	57688, 56448
1494	38, 65230	57746, 53620
1495	38, 66523	57804, 51885
1496	38, 67816	57862, 52736
1497	38, 69108	57920, 54676
1498	38, 70400	57978, 59200
1499	38, 71692	58036, 66308
1500	38, 72983	58094, 74500
1501	38, 74274	58152, 85274
1502	38, 75565	58210, 98630
1503	38, 76774	58267, 91322
1504	38, 78144	58327, 28576
1505	38, 79433	58385, 46665
1506	38, 80721	58443, 65826
1507	38, 82010	58501, 89070
1508	38, 83297	58560, 11876
1509	38, 84585	58618, 38765
1510	38, 85872	58676, 66720
1511	38, 87158	58734, 96738
1512	38, 88444	58793, 27328
1513	38, 89730	58851, 61490
1514	38, 91015	58909, 96710
1515	38, 92300	58968, 34500
1516	38, 93584	59026, 73344
1517	38, 94868	59085, 14756
1518	38, 96152	59143, 58736
1519	38, 97435	59202, 03765
1520	38, 98718	59260, 51360
1521	39, 00000	59319, 00000

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1522	39, 01282	59377, 51204
1523	39, 02563	59436, 03449
1524	39, 03844	59494, 58256
1525	39, 05125	59553, 15625
1526	39, 06405	59611, 74030
1527	39, 07685	59670, 34995
1528	39, 08964	59728, 96992
1529	39, 10242	59787, 60018
1530	39, 11521	59846, 27130
1531	39, 12799	59904, 95269
1532	39, 14077	59963, 65964
1533	39, 15354	60022, 37682
1534	39, 16631	60081, 11954
1535	39, 17908	60139, 88780
1536	39, 19184	60198, 66624
1537	39, 20459	60257, 45483
1538	39, 21734	60136, 26892
1539	39, 23009	60375, 10851
1540	39, 24283	60433, 95820
1541	39, 25557	60492, 83337
1542	39, 26831	60551, 73402
1543	39, 28104	60610, 64472
1544	39, 29376	60669, 56544
1545	39, 30649	60728, 52705
1546	39, 31921	60787, 49866
1547	39, 33192	60846, 48024
1548	39, 34463	60905, 48724
1549	39, 35734	60964, 51966
1550	39, 37004	61023, 56200
1551	39, 38274	61082, 62974
1552	39, 39543	61141, 70736
1553	39, 40812	61200, 81036
1554	39, 42081	61259, 93874
1555	39, 43349	61319, 07695

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1556	39, 44617	61378, 24052
1557	39, 45884	61437, 41388
1558	39, 47151	61496, 61258
1559	39, 48417	61555, 82103
1560	39, 49683	61615, 05480
1561	39, 50949	61674, 31389
1562	39, 52214	61733, 58268
1563	39, 53479	61792, 87677
1564	39, 54744	61852, 19616
1565	39, 56008	61911, 52520
1566	39, 57272	61970, 87952
1567	39, 58535	62030, 24345
1568	39, 59798	62089, 63264
1569	39, 61060	62149, 03140
1570	39, 62322	62208, 45540
1571	39, 63584	62267, 90464
1572	39, 64845	62327, 36340
1573	39, 66106	62386, 84738
1574	39, 67367	62446, 35658
1575	39, 68627	62505, 87525
1576	39, 69887	62565, 41912
1577	39, 71146	62624, 97242
1578	39, 72405	62684, 55090
1579	39, 73663	62744, 13877
1580	39, 74921	62803, 75180
1581	39, 76179	62863, 38999
1582	39, 77436	62923, 03752
1583	39, 78693	62982, 71019
1584	39, 79950	63042, 40800
1585	39, 81206	63102, 11510
1586	39, 82461	63161, 83146
1587	39, 83717	63221, 58879
1588	39, 84972	63281, 35536
1589	39, 86226	63341, 13114

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1590	39, 87480	63400, 93200
1591	39, 88734	63460, 75794
1592	39, 89987	63520, 59304
1593	39, 91240	63580, 45320
1594	39, 92492	63640, 32248
1595	39, 93745	63700, 23275
1596	39, 94997	63760, 15212
1597	39, 96248	63820, 08056
1598	39, 97499	63880, 03402
1599	39, 98750	63940, 01250
1600	40, 00000	64000, 00000
1601	40, 01250	64060, 01250
1602	40, 02499	64120, 03397
1603	40, 03748	64180, 08044
1604	40, 04997	64240, 15188
1605	40, 06245	64300, 23225
1606	40, 07493	64360, 33758
1607	40, 08740	64420, 45180
1608	40, 09987	64480, 59096
1609	40, 11234	64540, 75506
1610	40, 12480	64600, 92800
1611	40, 13726	64661, 12586
1612	40, 14972	64721. 34864
1613	40, 16217	64781, 58021
1614	40, 17462	64841, 83668
1615	40, 18706	64902, 10190
1616	40, 19950	64962, 39200
1617	40, 21194	65022, 70698
1618	40, 22437	65083, 03066
1619	40, 23680	65143, 37920
1620	40, 24922	65203, 73640
1621	40, 26164	65264, 11844
1622	40, 27406	65324, 52532
1623	40, 28647	65384, 94081

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1624	40, 29888	65445, 38112
1625	40, 31129	65505, 84625
1626	40, 32369	65566, 31994
1627	40, 33609	65626, 81843
1628	40, 34848	65687, 32544
1629	40, 36087	65747, 85723
1630	40, 37326	65808, 41380
1631	40, 38564	65868, 97884
1632	40, 39802	65929, 56864
1633	40, 41039	65990, 16687
1634	40, 42276	66050, 78984
1635	40, 43513	66111, 43755
1636	40, 44750	66172, 11000
1637	40, 45986	66232, 79082
1638	40, 47221	66293, 47998
1639	40, 48456	66354, 19384
1640	40, 49691	66414, 93240
1641	40, 50926	66475, 69566
1642	40, 52160	66536, 46720
1643	40, 53394	66597, 26342
1644	40, 54627	66658, 06788
1645	40, 55872	66719, 09440
1646	40, 57092	66779, 73432
1647	40, 58325	66840, 61275
1648	40, 59557	66901, 49936
1649	40, 60788	66962, 39412
1650	40, 62019	67023, 31350
1651	40, 63250	67084, 25750
1652	40, 64480	67145, 20960
1653	40, 65701	67206, 03753
1654	40, 66940	67267, 18760
1655	40, 68169	67328, 19695
1656	40, 69398	67389, 23088
1657	40, 70626	67450, 27282

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1658	40, 71855	67511, 35590
1659	40, 73082	67572, 43038
1660	40, 74310	67633, 54600
1661	40, 75537	67694, 66957
1662	40, 76763	67755, 80106
1663	40, 77990	67816, 97370
1664	40, 79216	67878, 15424
1665	40, 80441	67939, 34265
1666	40, 81666	68000, 55556
1667	40, 82891	68061, 79297
1668	40, 84115	68123, 03820
1669	40, 85340	68184, 39136
1670	40, 86563	68245, 60210
1671	40, 87787	68306, 92077
1672	40, 89010	68368, 24720
1673	40, 90232	68429, 58136
1674	40, 91454	68490, 93996
1675	40, 92676	68552, 32300
1676	40, 93898	68613, 73048
1677	40, 95119	68675, 14563
1678	40, 96340	68736, 58520
1679	40, 97560	68798, 03240
1680	40, 98780	68859, 50400
1681	41, 00000	68921, 00000
1682	41, 01219	68982, 50358
1683	41, 02429	69043, 88007
1684	41, 03657	69105, 58388
1685	41, 04875	69167, 14375
1686	41, 06093	69228, 72798
1687	41, 07310	69290, 31970
1688	41, 08528	69351, 95264
1689	41, 09744	69413, 57616
1690	41, 10961	69475, 24090
1691	41, 12177	69536, 91307

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1692	41, 13393	69598, 60956
1693	41, 14608	69660, 31344
1694	41, 15823	69722, 04162
1695	41, 17038	69783, 79410
1696	41, 18252	69845, 55392
1697	41, 19466	69907, 33802
1698	41, 20679	69969, 12942
1699	41, 21893	70030, 96207
1700	41, 23106	70092, 80200
1701	41, 24318	70154, 64918
1702	41, 25530	70216, 52060
1703	41, 26742	70278, 41626
1704	41, 27953	70340, 31912
1705	41, 29164	70402, 24620
1706	41, 30375	70464, 19750
1707	41, 31585	70526, 15595
1708	41, 32796	70588, 15568
1709	41, 34005	70650, 14545
1710	41, 35215	70712, 17650
1711	41, 36423	70774, 19753
1712	41, 37632	70836, 25984
1713	41, 38840	70898, 32920
1714	41, 40048	70960, 42272
1715	41, 41255	71022, 52325
1716	41, 42463	71084, 66508
1717	41, 43670	71146, 81390
1718	41, 44876	71208, 96968
1719	41, 46082	71271, 14958
1720	41, 47288	71333, 35360
1721	41, 48494	71395, 58174
1722	41, 49698	71457, 79956
1723	41, 50903	71520, 05869
1724	41, 52108	71582, 34192
1725	41, 53312	71644, 63200

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1726	41, 54516	71706, 94616
1727	41, 55719	71769, 26713
1728	41, 56922	71831, 61216
1729	41, 58124	71893, 96396
1730	41, 59327	71956, 35710
1731	41, 60529	72018, 75699
1732	41, 61730	72081, 16360
1733	41, 62932	72143, 61156
1734	41, 64132	72206, 04888
1735	41, 65333	72268, 52755
1736	41, 66533	72331, 01288
1737	41, 67733	72393, 52221
1738	41, 68934	72456, 07292
1739	41, 70132	72518, 59548
1740	41, 71331	72581, 15940
1741	41, 72529	72643, 72989
1742	41, 73727	72706, 32434
1743	41, 74925	72768, 94275
1744	41, 76123	72831, 58512
1745	41, 77320	72894, 23400
1746	41, 78516	72956, 88936
1747	41, 79713	73019, 58611
1748	41, 80909	73082, 28932
1749	41, 82105	73145, 01645
1750	41, 83300	73207, 75000
1751	41, 84495	73270, 50745
1752	41, 85690	73333, 28880
1753	41, 86884	73396, 07652
1754	41, 88078	73458, 88812
1755	41, 89272	73521, 72360
1756	41, 90465	73584, 56540
1757	41, 91658	73647, 43106
1758	41, 92851	73710, 32058
1759	41, 94043	73773, 21637

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1760	41, 95235	73836, 13600
1761	41, 96427	73899, 07947
1762	41, 97618	73962, 02916
1763	41, 98809	74025, 00267
1764	42, 00000	74088, 00000
1765	42, 01190	74151, 00350
1766	42, 02380	74214, 03080
1767	42, 03570	74277, 08190
1768	42, 04759	74340, 13912
1769	42, 05948	74403, 22012
1770	42, 07137	74466, 32490
1771	42, 08325	74529, 43575
1772	42, 09513	74592, 57036
1773	42, 10701	74655, 72873
1774	42, 11888	74718, 89312
1775	42, 13075	74782, 08125
1776	42, 14261	74845, 27536
1777	42, 15448	74908, 51096
1778	42, 16634	74971, 75252
1779	42, 17819	75035, 00001
1780	42, 19005	75098, 28900
1781	42, 20189	75161, 56609
1782	42, 21374	75224, 88468
1783	42, 22558	75288, 20914
1784	42, 23742	75351, 55728
1785	42, 24926	75414, 92910
1786	42, 26109	75478, 30674
1787	42, 27292	75541, 70804
1788	42, 28475	75605, 13300
1789	42, 29657	75668, 56373
1790	42, 30839	75732, 01810
1791	42, 32021	75795, 49611
1792	42, 33202	75858, 97984
1793	42, 34383	75922, 48719

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1794	42, 35564	75986, 01816
1795	42, 36744	76049, 55480
1796	42, 37924	76113, 11504
1797	42, 39104	76176, 69888
1798	42, 40283	76240, 28814
1799	42, 41462	76303, 90138
1800	42, 42641	76367, 53800
1801	42, 43819	76431, 18019
1802	42, 44997	76494, 84594
1803	42, 46175	76558, 53525
1804	42, 47352	76622, 23008
1805	42, 48529	76685, 94845
1806	42, 49706	76749, 69036
1807	42, 50882	76813, 43774
1808	42, 52058	76877, 20864
1809	42, 53234	76941, 00306
1810	42, 54409	77004, 80290
1811	42, 55584	77068, 62624
1812	42, 56759	77132, 47308
1813	42, 57934	77196, 34342
1814	42, 59108	77260, 21912
1815	42, 60282	77324, 11830
1816	42, 61455	77388, 02280
1817	42, 62628	77451, 95076
1818	42, 63801	77515, 90218
1819	42, 64974	77579, 87606
1820	42, 66146	77643, 85720
1821	42, 67318	77707, 86078
1822	42, 68489	77771, 86958
1823	42, 69660	77835, 90180
1824	42, 70831	77899, 95744
1825	42, 72002	77964, 03650
1826	42, 73172	78028, 12072
1827	42, 74342	78092, 22834

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1828	42, 75512	78156, 35936
1829	42, 76681	78220, 49549
1830	42, 77850	78284, 65500
1831	42, 79018	78348, 81958
1832	42, 80187	78413, 02584
1833	42, 81355	78477, 23715
1834	42, 82523	78541, 47182
1835	42, 83690	78605, 71150
1836	42, 84857	78669, 97452
1837	42, 86024	78734, 26088
1838	42, 87190	78798, 55220
1839	42, 88356	78862, 86684
1840	42, 89522	78927, 20480
1841	42, 90687	78991, 54767
1842	42, 91853	79055, 93226
1843	42, 93017	79120, 30331
1844	42, 94182	79184, 71608
1845	42, 95346	79249, 13370
1846	42, 96510	79313, 57460
1847	42, 97674	79378, 03878
1848	42, 98837	79442, 50776
1849	43, 00000	79507, 00000
1850	43, 01163	79571, 51550
1851	43, 02325	79636, 03575
1852	43, 03487	79700, 57924
1853	43, 04649	79765, 14597
1854	43, 05810	79829, 71740
1855	43, 06971	79894, 31205
1856	43, 08132	79958, 92992
1857	43, 09292	80023, 55244
1858	43, 10452	80088, 19816
1859	43, 11612	80152, 86708
1860	43, 12772	80217, 55920
1861	43, 13931	80282, 25591

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1862	43, 15090	80346, 97580
1863	43, 16248	80411, 70024
1864	43, 17407	80476, 46648
1865	43, 18564	80541, 21860
1866	43, 19722	80606, 01252
1867	43, 20879	80670, 81093
1868.	43, 22036	80735, 63248
1869	43, 23193	80800, 47717
1870	43, 24350	80865, 34500
1871	43, 25506	80930, 21726
1872	43, 26661	80995, 09392
1873	43, 27817	81060, 01241
1874	43, 28972	81124, 93528
1875	43, 30127	81189, 88125
1876	43, 31281	81254, 83156
1877	43, 32436	81319, 82372
1878	43, 33590	81384, 82020
1879	43, 34743	81449, 82097
1880	43, 35897	81514, 86360
1881	43, 37050	81579, 91050
1882	43, 38202	81644, 96164
1883	43, 39355	81710, 05465
1884	43, 40507	81775, 15188
1885	43, 41659	81840, 27215
1886	43, 42810	81905, 39660
1887	43, 43961	81970, 54407
1888	43, 45112	82035, 71456
1889	43, 46263	82100, 90807
1890	43, 47413	82166, 10570
1891	43, 48563	82231, 32633
1892	43, 49713	82296, 56996
1893	43, 50862	82361, 81766
1894	43, 52011	82427, 08834
1895	43, 53160	82492, 38200

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1896	43, 54308	82557, 67968
1897	43, 55456	82623, 00032
1898	43, 56604	82688, 34392
1899	43, 57752	82753, 71048
1900	43, 58899	82819, 08100
1901	43, 60046	82884, 47446
1902	43, 61192	82949, 87184
1903	43, 62339	83015, 31117
1904	43, 63485	83080, 75440
1905	43, 64630	83146, 20150
1906	43, 65776	83211, 69056
1907	43, 66921	83277, 18347
1908	43, 68066	83342, 69928
1909	43, 69210	83408, 21890
1910	43, 70355	83473, 78050
1911	43, 71499	83539, 34589
1912	43, 72642	83604, 91504
1913	43, 73785	83670, 50705
1914	43, 74928	83736, 12192
1915	43, 76071	83801, 75965
1916	43, 77214	83867, 42024
1917	43, 78356	83933, 08452
1918	43, 79498	83998, 77164
1919	43, 80638	84064, 44322
1920	43, 81780	84130, 17600
1921	43, 82921	84195, 91241
1922	43, 84062	84261, 67164
1923	43, 85202	84327, 43446
1924	43, 86342	84393, 22008
1925	43, 87482	84459, 02850
1926	43, 88622	84524, 85972
1927	43, 89761	84590, 69447
1928	43, 90900	84656, 55200
1929	43, 92038	84722, 41302

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1930	43, 93176	84788, 29680
1931	43, 94314	84854, 20334
1932	43, 95452	84920, 13264
1933	43, 96589	84986, 06537
1934	43, 97727	85052, 04018
1935	43, 98863	85117, 99905
1936	44, 00000	85184, 00000
1937	44, 01136	85250, 00432
1938	44, 02272	85316, 03136
1939	44, 03408	85382, 08112
1940	44, 04543	85448, 13420
1941	44, 05678	85514, 20998
1942	44, 06813	85580, 30846
1943	44, 07947	85646, 41021
1944	44, 09081	85712, 53464
1945	44, 10215	85778, 68175
1946	44, 11349	85844, 85154
1947	44, 12482	85911, 02454
1948	44, 13615	85977, 22020
1949	44, 14748	86043, 43852
1950	44, 15880	86109, 66000
1951	44, 17012	86175, 90412
1952	44, 18144	86242, 17088
1953	44, 19276	86308, 46028
1954	44, 20407	86374, 75278
1955	44, 21538	86441, 06790
1956	44, 22669	86507, 40564
1957	44, 23799	86573, 74643
1958	44, 24929	86640, 10982
1959	44, 26059	86706, 49581
1960	44, 27189	86772, 90440
1961	44, 28317	86839, 29637
1962	44, 29447	86905, 75014
1963	44, 30575	86972, 18725

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocità
1964	44, 31704	87038, 66656
1965	44, 32832	87105, 14880
1966	44, 33960	87171, 65360
1967	44, 35087	87238, 16129
1968	44, 36215	87304, 71120
1969	44, 37341	87371, 24429
1970	44, 38468	87437, 81960
1971	44, 39594	87504, 39774
1972	44, 40721	87571, 01812
1973	44, 41846	87637, 62158
1974	44, 42972	87704, 26728
1975	44, 44097	87770, 91575
1976	44, 45222	87837, 58672
1977	44, 46347	87904, 28019
1978	44, 47471	87970, 97638
1979	44, 48595	88037, 69505
1980	44, 49719	88104, 43620
1981	44, 50843	88171, 19983
1982	44, 51966	88237, 96612
1983	44, 53089	88304, 75487
1984	44, 54211	88371, 54624
1985	44, 55334	88438, 37990
1986	44, 56456	88505, 21616
1987	44, 57578	88572, 08486
1988	44, 58699	88638, 93612
1989	44, 59821	88705, 83969
1990	44, 60942	88772, 74580
1991	44, 62062	88839, 65442
1992	44, 63183	88906, 60536
1993	44, 64303	88973, 55879
1994	44, 65423	89040, 53462
1995	44, 66542	89107, 51290
1996	44, 67661	89174, 51356
1997	44, 68780	89241, 53660

Altezze date	Radici, o velocità	Prodotto delle altezze nelle velocita
1998	44, 69899	89308, 58202
1999	44, 71018	89375, 64982
2000	44, 72136	89442, 72000

Fine della Tavola Parabolica,

II

TAVOLA PARABOLICA

Incominciando da punti 1 *del braccio di Milano fino alle oncie* 30.

$a+b$ $\sqrt{a+b}$ $(a+b)\sqrt{a+b}$

Altezze date		Radici, ossia velocità	Prodotti delle altezze nelle velocità
Once	Punti		
0	1	0,28867	0,02406
0	2	0,40825	0,06804
0	3	0,50000	0,12500
0	4	0,57735	0,19245
0	5	0,64550	0,26896
0	6	0,70711	0,35355
0	7	0,76376	0,44553
0	8	0,81650	0,54433
0	9	0,86602	0,64952
0	10	0,91287	0,76072
0	11	0,95743	0,87764
1	—	1,00000	1,00000
1	1	1,04083	1,12757
1	2	1,08012	1,26014
1	3	1,11803	1,39754
1	4	1,15470	1,53960
1	5	1,19024	1,68617
1	6	1,22474	1,83712
1	7	1,25830	1,99232
1	8	1,29099	2,15166
1	9	1,32287	2,31503
1	10	1,35401	2,48234
1	11	1,38444	2,65350
2	—	1,41421	2,82843
2	1	1,44337	3,00703
2	2	1,47196	3,18925

Altezze date		Radici, ossia velocità	Prodotti delle altezze nelle velocità
Once	Punti		
2	3	1,50000	3,37500
2	4	1,52752	3,56422
2	5	1,55456	3,75786
2	6	1,58114	3,95285
2	7	1,60727	4,15213
2	8	1,63299	4,35465
2	9	1,65831	4,56036
2	10	1,68325	4,76921
2	11	70782	4,98116
3	—	1,73205	5,19615
3	1	1,75594	5,41415
3	2	1,77951	5,63512
3	3	1,80277	5,85902
3	4	1,82574	6,08581
3	5	1,84842	6,31544
3	6	1,87083	6,54790
3	7	1,89297	6,78314
3	8	1,91485	7,02113
3	9	1,93649	7,26184
3	10	1,95789	7,50524
3	11	1,97906	7,75131
4	—	2,00000	8,00000
4	1	2,02072	8,25130
4	2	2,04124	8,50517
4	3	2,06155	8,76160
4	4	2,08166	9,02055
4	5	2,10159	9,28201
4	6	2,12132	9,54594
4	7	2,14087	9,81233
4	8	2,16025	10,08115
4	9	2,17945	10,53238
4	10	2,19848	10,62601
4	11	2,21735	10,90200

$\sqrt{a+b}$ $(a+b)\sqrt{a+b}$

Altezze date		Radici, ossia velocità	Prodotti delle altezze nelle velocità
Once	Punti		
5	—	2,23607	11,18034
5	1	2,25462	11,46101
5	2	2,23303	11,74399
5	3	2,29128	12,02926
5	4	2,30940	12,31680
5	5	2,32737	12,60660
5	6	2,34521	12,89864
5	7	2,36291	13,19290
5	8	2,38048	13,48936
5	9	2,39791	13,78801
5	10	2,41523	14,08884
5	11	2,43242	14,39182
6	—	2,44949	14,69694
6	1	2,46644	15,00418
6	2	2,48328	15,31354
6	3	2,50000	15,62500
6	4	2,51661	15,93854
6	5	2,53311	16,25415
6	6	2,54951	16,57181
6	7	2,56580	16,89152
6	8	2,58199	17,21326
6	9	2,59808	17,53701
6	10	2,61406	17,86277
6	11	2,62995	18,19053
7	—	2,64575	18,52026
7	1	2,66145	18,85196
7	2	2,67706	19,18562
7	3	2,69258	19,52122
7	4	2,70801	19,85876
7	5	2,72335	20,19822
7	6	2,73861	20,53959
7	7	2,75378	20,88287
7	8	2,76887	21,22804

Altezze date		Radici, ossia velocità	Prodotti delle altezze nelle velocità
Once	Punti		
7	9	2,78388	21,57509
7	10	2,79881	21,92400
7	11	2,81366	22,27478
8	—	2,82843	22,62742
8	1	2,84312	22,98189
8	2	2,85774	23,33819
8	3	2,87228	23,69632
8	4	2,88675	24,05626
8	5	2,90115	24,41800
8	6	2,91547	24,78154
8	7	2,92973	25,14687
8	8	2,94392	25,51397
8	9	2,95804	25,88285
8	10	2,97209	26,25348
8	11	2,98608	26,62587
9	—	3,00000	27,00000
9	1	3,01386	27,37587
9	2	3,02765	27,75246
9	3	3,04138	28,13278
9	4	3,05505	28,51380
9	5	3,06865	28,89654
9	6	3,08221	29,28097
9	7	3,09569	29,66708
9	8	3,10913	29,05489
9	9	3,12250	30,44436
9	10	3,13581	30,83551
9	11	3,14907	31,22832
10	—	3,16228	31,62278
10	1	3,17543	32,01888
10	2	3,18852	32,41662
10	3	3,20156	32,81601
10	4	3,21455	33,21702
10	5	3,22749	33,61965

Altezze date		Radici, ossia velocità	Prodotti delle altezze nelle velocità
Once	Punti		
10	6	3,34037	34,02389
10	7	3,25320	34,42974
10	8	3,26599	34,83719
10	9	3,27872	35,24623
10	10	3,29140	35,65686
10	11	3,30404	36,06908
11	—	3,31662	36,48287
11	1	3,32916	36,89823
11	2	3,34166	37,31516
11	3	3,35410	37,73365
11	4	3,36650	38,15368
11	5	3,37885	38,57527
11	6	3,39116	38,99840
11	7	3,40333	39,42306
11	8	3,41565	39,84925
11	9	3,42783	40,27697
11	10	3,43996	40,70621
11	11	3,45205	41,13696
12	—	3,46410	41,56922
12	1	3,47610	42,00298
12	2	3,48807	42,43824
12	3	3,50000	42,87500
12	4	3,51188	43,31324
12	5	3,52373	43,75297
12	6	3,53553	44,19417
12	7	3,54730	44,63685
12	8	3,55902	45,08100
12	9	3,57071	45,52661
12	10	3,58236	45,97367
12	11	3,59398	46,42219
13	—	3,60555	46,87217
13	1	3,61709	47,32358
13	2	3,62859	47,77644

Altezze date		Radici, ossia velocità	Prodotti delle altezze nelle velocità
Once	Punti		
13	3	3,64005	48,23073
13	4	3,65148	48,68645
13	5	3,66288	49,14360
13	6	3,67423	49,60217
13	7	3,68556	50,06215
13	8	3,69684	50,52355
13	9	3,70810	50,98636
13	10	3,71932	51,45058
13	11	3,73050	51,91619
14	—	3,74166	52,38320
14	1	3,75276	52,85142
14	2	3,76386	53,32140
14	3	3,77492	53,79257
14	4	3,78594	54,26512
14	5	3,79693	54,73905
14	6	3,80789	55,21435
14	7	3,81881	55,69102
14	8	3,82971	56,16906
14	9	3,84057	56,64845
14	10	3,85141	57,12920
14	11	3,86234	57,61323
15	—	3,87298	58,09475
15	1	3,88373	58,57954
15	2	3,89444	59,06568
15	3	3,90512	59,55315
15	4	3,91578	60,04196
15	5	3,92641	60,53210
15	6	3,93700	61,02356
15	7	3,94757	61,51635
15	8	3,95811	62,01045
15	9	3,96863	62,50587
15	10	3,97911	63,00261
15	11	3,98957	63,50065

Altezze date		Radici, ossia velocità	Prodotti delle altezze nelle velocità
Once	Punti		
16	— —	4,00000	64,00000
16	1	4,01040	64,50065
16	2	4,02078	65,00260
16	3	4,03113	65,50582
16	4	4,04145	66,01038
16	5	4,05175	66,51621
16	6	4,06202	67,02332
16	7	4,07226	67,53170
16	8	4,08248	68,04138
16	9	4,09268	68,55233
16	10	4,10284	69,06455
16	11	4,11298	69,57804
17	— —	4,12310	70,09279
17	1	4,13320	70,60881
17	2	4,14327	71,12609
17	3	4,15331	71,64463
17	4	4,16333	72,16442
17	5	4,17333	72,68546
17	6	4,18330	73,20775
17	7	4,19325	73,73129
17	8	4,20317	74,25606
17	9	4,21307	74,78208
17	10	4,22295	75,30933
17	11	4,23281	75,83782
18	— —	4,24264	76,36753
18	1	4,25245	76,89847
18	2	4,26224	77,43064
18	3	4,47200	77,96403
18	4	4,28174	78,49864
18	5	4,29146	79,03447
18	6	4,30116	79,57109
18	7	4,31084	80,10976
18	8	4,32049	80,64922

Altezze date		Radici, ossia velocità	Prodotti delle altezze nelle velocità
Once	Punti		
18	9	4,33013	81,18988
18	10	4,33974	81,73175
18	11	4,34933	82,27481
19	—	4,35890	82,81908
19	1	4,36845	83,36454
19	2	4,37797	83,91119
19	3	4,38862	84,48097
19	4	4,39697	85,00806
19	5	4,40643	85,55827
19	6	4,41588	86,10967
19	7	4,42531	86,66224
19	8	4,43471	87,21599
19	9	4,44410	87,77092
19	10	4,45346	88,32702
19	11	4,46281	88,88428
20	—	4,47213	89,44272
20	1	4,48144	90,00232
20	2	4,49073	90,56308
20	3	4,50000	91,12500
20	4	4,50925	91,68808
20	5	4,51848	92,25231
20	6	4,52769	92,81770
20	7	4,53688	93,38423
20	8	4,54606	93,95192
20	9	4,55522	94,52075
20	10	4,56435	95,09072
20	11	4,57347	95,66184
21	—	4,58257	96,23409
21	1	4,59166	96,80748
21	2	4,60072	97,38200
21	3	4,60977	97,95766
21	4	4,61880	98,53444
21	5	4,62781	99,11236

Altezze date		Radici, ossia velocità	Prodotti delle altezze nelle velocità
Once	Punti		
21	6	4,63681	99,69140
21	7	4,64579	100,27156
21	8	4,65475	100,85284
21	9	4,66369	101,43525
21	10	4,67261	102,01877
21	11	4,68152	102,60340
22	—	4,69041	103,18915
22	1	4,69929	103,77600
22	2	4,70815	104,36397
22	3	4,71699	104,95304
22	4	4,72581	105,54321
22	5	4,73462	106,13449
22	6	4,74342	106,72687
22	7	4,75219	107,32035
22	8	4,76095	107,91492
22	9	4,76970	108,51058
22	10	4,77842	109,10734
22	11	4,78713	109,70519
23	—	4,79583	110,30412
23	1	4,80451	110,90415
23	2	4,81318	111,50525
23	3	4,82182	112,10744
23	4	4,83046	112,71071
23	5	4,83908	113,31505
23	6	4,84768	113,92048
23	7	4,85627	114,52697
23	8	4,86484	115,13452
23	9	4,87340	115,74318
23	10	4,88194	116,35289
23	11	4,89047	116,96367
24	—	4,89898	117,57551
24	1	4,90748	118,18841
24	2	4,91596	118,80238

Altezze date		Radici, ossia velocità	Prodotti delle altezze nelle velocità
Once	Punti		
24	3	4,92443	119,41740
24	4	4,93288	120,03348
24	5	4,94132	120,65062
24	6	4,94975	121,26881
24	7	4,95816	121,88806
24	8	4,96655	122,50835
24	9	4,97494	123,12969
24	10	4,98330	123,75208
24	11	4,99166	124,37552
25	—	5,00000	125,00000
25	1	5,00833	125,62552
25	2	5,01664	126,25208
25	3	5,02494	126,87968
25	4	5,03322	127,50831
25	5	5,04149	128,13798
25	6	5,04975	128,76869
25	7	5,05800	129,40042
25	8	5,06623	130,03319
25	9	5,07444	130,66698
25	10	5,08265	131,30180
25	11	5,09084	131,93764
26	—	5,09902	132,57457
26	1	5,10718	133,21239
26	2	5,11534	133,85130
26	3	5,12347	134,49123
26	4	5,13160	135,13217
26	5	5,13971	135,77413
26	6	5,14781	136,41710
26	7	5,15590	137,06108
26	8	5,16398	137,70607
26	9	5,17204	138,35207
26	10	5,18009	138,99908
26	11	5,18813	139,64710

Altezze date		Radici, ossia velocità	Prodotti delle altezze nelle velocità
Once	Punti		
27	—	5,19615	140,29611
27	1	5,20416	140,94613
27	2	5,21216	141,59715
27	3	5,22015	142,24918
27	4	5,22813	142,90219
27	5	5,23609	143,55621
27	6	5,24404	144,21122
27	7	5,25198	144,86722
27	8	5,25991	145,52421
27	9	5,26783	146,78219
27	10	5,27573	146,84117
27	11	5,28362	147,50113
28	—	5,29150	148,16207
28	1	5,29937	148,82400
28	2	5,30723	149,48691
28	3	5,31507	150,15081
28	4	5,32291	150,81568
28	5	5,33073	151,48154
28	6	5,33854	152,14836
28	7	5,34634	152,81617
28	8	5,35413	153,48495
28	9	5,36190	154,15470
28	10	5,36967	154,82542
28	11	5,37742	155,49712
29	—	5,38516	156,16978
29	1	5,39290	156,84341
29	2	5,40062	157,51800
29	3	5,40833	158,19356
29	4	5,41602	158,87008
29	5	5,42371	159,54757
29	6	5,43139	160,22601
29	7	5,43906	160,90541
29	8	5,44671	161,58577

Altezze date		Radici, ossia velocità	Prodotti delle altezze nelle velocità
Once	Punti		
29	9	5,45436	162,26709
29	10	5,46199	162,94936
29	11	5,46961	163,63259
30	—	5,47722	164,31677

TAVOLA

DELLE PRINCIPALI MISURE LINEARI DELLA REPUBBLICA ITALIANA RIPORTATE AL METRO.

		BRACCIO in Misura Italiana.	METRO in Misura del rispettivo Paese.
	BRACCIO	Metri Atomi	Braccia Milles.
Bergamo	da Panno - - - -	0,659 32	1,516 71
	da Fabbrica - - -	0,531 41	1,881 77
Bologna	- - - - - - - - -	0,640 04	1,562 41
Brescia	da Panno - - - -	0,674 12	1,483 41
	da Seta e Tela - -	0,640 38	1,561 57
Carrara	Braccio - - - - -	0,619 73	1,613 62
	Canna per Legnami	0,624 55	1,601 16
	Palmo per Marmi	0,249 27	4,011 76
Cento	- - - - - - - - -	0,637 63	1,568 31
Cervia	Piede da Legno -	0,346 19	2,888 63
	Braccio - - - - -	0,666 55	1,500 26
Cesena	da Tela - - - - -	0,702 36	1,423 78
	da Lana e Seta -	0,619 73	1,613 62
Chiavenna	da Seta - - - - -	0,527 20	1,896 82
	Lungo - - - - - -	0,670 85	1,490 64
Como	come Milano - - -	- - - - -	- - - - -
Crema	- - - - - - - - -	0,670 16	1,492 17
Cremona	come Milano - - -	- - - - -	- - - - -
Faenza	da Panno - - - -	0,638 66	1,565 77
	da Tele nostrali -	0,719 74	1,389 39

	BRACCIO	BRACCIO in Misura Italiana. Metri Atomi	METRO in Misura del rispettivo Paese Braccia Millesimi.
Ferrara	da Panno e Tela	0,673 61	1,484 54
	da Seta - - - - -	0,634 36	1,576 40
Forlì'	da Panno - - - -	0,621 96	1,607 81
	da Tele nostrali -	0,737 30	1,356 30
Imola	- - - - - - - - - -	0,639 35	1,564 09
Lodi	come Milano - - -	- - - - -	- - - - -
Lugo	- - - - - - - - - -	0,637 97	1,567 47
Mantova	come Lugo - - -	- - - - -	- - - - -
Milano	- - - - - - - - - -	0,594 94	1,680 85
Modena	- - - - - - - - - -	0,633 15	1,579 40
Novara	da Panno - - - -	0,668 79	1,495 24
	da Seta - - - - -	0,524 18	1,907 73
	da Fustagno - - -	0,593 22	1,685 73
	da Legname - - -	0,606 21	1,649 59
Pavia	come Milano - - -	- - - - -	- - - - -
Ravenna	da Panno - - - -	0,643 14	1,554 88
	da Legname - - -	0,347 56	2,877 18
Reggio	da Mercante - - -	0,641 07	1,559 89
	da Legno - - - -	0,530 21	1,886 05
Rimini	- - - - - - - - - -	0,631 43	1,583 70
Rovigo	da Panno - - - -	0,669 82	1,492 94
	da Seta - - - - -	0,632 81	1,580 26
Sondrio	Lungo - - - - - -	0,671 71	1,488 73
	Corto - - - - - -	0,530 55	1,884 82
	da Legname - - -	0,507 49	1,970 50
Valcamonica	da Panno - - - -	0,682 56	1,465 08
	da Seta - - - - -	0,641 07	1,559 80
Valsesia	Lungo - - - - - -	0,793 25	1,260 64
	Corto - - - - - -	0,594 94	1,680 85

	BRACCIO	BRACCIO in Misura Italiana. Metri	Atomi	METRO in Misura del rispettivo Paese. Braccia	Milles.
Verona	Lungo - - - - - -	0,648	99	1,540	86
	Corto - - - - - -	0,642	45	1,556	54
Vigevano	da Panno - - - -	0,668	10	1,496	78
	da Seta - - - - -	0,528	14	1,893	42
	da Legname - - -	0,599	07	1,669	26
Firenze	da Panno - - - -	0,583	03	1,715	18
Genova	Palmo - - - - - -	0,249	10	4,014	53
Londra	Auna - - - - - -	1,143	00	0,874	89
Napoli	Canna - - - - - -	2,096	12	0,477	07
Parigi	Auna - - - - - -	1,191	19	0,839	50
	Metro - - - - - -	1		1	
Parma	Braccio da Panno	0,643	14	1,554	88
	da Seta - - - - -	0,587	71	1,701	92
	da Legname - - -	0,544	60	1,836	20
Roma	Canna da Mercante	1,991	90	0,502	03
	Palmo - - - - - -	0,223	40	4,476	23
Torino	Raso - - - - - - -	0,599	30	1,668	62
Venezia	Braccio lungo - -	0,679	27	1,472	16
	Corto - - - - - -	0,637	63	1,568	31

Tavola di rapporto delle quantità d'acqua erogate da un bocchello regolare milanese di qualsivoglia portata, per la minorazione delle due once di battente, indi delle once quattro di luce libera, decrescendo a punto per punto sino alla totale estinzione della luce.

Altezza del battente oltre le once quattro di luce libera.		Frazione che deve moltiplicare la totale quantità d'acqua del bocchello.	
Once.	Punti.	Unità.	Frazioni.
2	--	1,	00000
1	11	0,	98903
1	10	0,	97792
1	9	0,	96667
1	8	0,	95527
1	7	0,	94372
1	6	0,	93200
1	5	0,	92012
1	4	0,	90805
1	3	0,	89579
1	2	0,	88333
1	1	0,	87066
1	--	0,	85776
-	11	0,	84462
-	10	0,	83121
-	9	0,	81753
-	8	0,	80354
-	7	0,	78921
-	6	0,	77452
-	5	0,	75941
-	4	0,	74382
-	3	0,	72769
-	2	0,	71088
-	1	0,	69319

Altezza della luce
libera priva di battente.

Once.	Punti.	
4	--	0, 67405
3	11	0, 65310
3	10	0, 63236
3	9	0, 61186
3	8	0, 59158
3	7	0, 57152
3	6	0, 55171
3	5	0, 53212
3	4	0, 51277
3	3	0, 49366
3	2	0, 47480
3	1	0, 45618
3	--	0, 43781
2	11	0, 41969
2	10	0, 40184
2	9	0, 38424
2	8	0, 36691
2	7	0, 34984
2	6	0, 33305
2	5	0, 31662
2	4	0, 30031
2	3	0, 28436
2	2	0, 26871
2	1	0, 25336
2	--	0, 23831
1	11	0, 22357
1	10	0, 20915
1	9	0, 19506
1	8	0, 18129

1	7	- - - - -	0, 16787
1	6	- - - - -	0, 15479
1	5	- - - - -	0, 14207
1	4	- - - - -	0, 12972
1	3	- - - - -	0, 11775
1	2	- - - - -	0, 10617
1	1	- - - - -	0, 09500
1	--	- - - - -	0, 08426
-	11	- - - - -	0, 07395
-	10	- - - - -	0, 06409
-	9	- - - - -	0, 05473
-	8	- - - - -	0, 04586
-	7	- - - - -	0, 03754
-	6	- - - - -	0, 02979
-	5	- - - - -	0, 02266
-	4	- - - - -	0, 01621
-	3	- - - - -	0, 01053
-	2	- - - - -	0, 00573
-	1	- - - - -	0, 00203

MISURE LINEARI DEI TERRENI.

	PIEDE diviso in parti.	PIEDE in Misura Italiana. Metri	Atomi	METRO in Misura del rispettivo Paese. Piedi	Milles.
Bergamo	12	0,437	7672	2,284	3192
Bologna	12	0,380	0983	2,630	8985
Brescia	12	0,470	9914	2,123	1812
Carrara	12	0,293	3367	3,409	0515
Cento	12	0,396	4522	2,522	3725
Cervia	10	0,649	3346	1,540	0381
Cesena	10	0,538	4726	1,857	1048
Chiavenna	12	0,527	1970	1,896	8242
Como	12	0,451	2190	2,216	2187
Crema	12	0,469	7863	2,128	6272
Cremona	12	0,483	5389	2,068	0860
Faenza	10	0,479	7708	2,084	3286
Ferrara	12	0,403	8544	2,476	1397
Forlì	10	0,488	2060	2,048	3159
Imola	10	0,439	6608	2,274	4807
Lodi	12	0,455	3324	2,196	1976
Lugo	10	0,410	0519	2,438	7170
Mantova	12	0,466	8598	2,141	9704
Milano	12	0,435	1850	2,297	8733
Modena	12	0,523	0483	1,911	8693
Novara	12	0,470	9467	2,123	3824
Pavia	12	0,471	9541	2,118	8502
Ravenna	10	0,584	6077	1,710	5488
Reggio	12	0,530	8981	1,883	6005
Rimini	10	0,542	9483	1,841	7958
Rovigo	12	0,384	2298	2,602	6092

		PIEDE diviso in parti	PIEDE in Misura Italiana. Metri	Atomi	METRO in Misura del rispettivo Paese. Piedi	Milles.
Sondrio		12	0,446	2023	2,241	1357
Valcamonica		12	0,476	3279	2,099	3942
Valsesia come Milano e come Novara						
Verona		12	0,342	9148	2,916	1766
Vigevano		12	0,462	3841	2,162	7043
Firenze	Braccio	20	0,583	0281	1,715	1831
Genova	Palmo	12	0,249	0952	4,014	5293
Londra	Piede	12	0,304	7989	3,280	8517
Napoli	Palmo	12	0,262	0146	3,816	5814
Parigi	Piede	12	0,324	8394	3,078	4440
	Metro	10	1,		1	
Parma	Piede	12	0,544	6698	1,835	9745
Roma	Palmo	12	0,223	4023	4,476	2296
Torino	Piede	12	0,513	6836	1,946	7234
Venezia	Piede	12	0,347	3977	2,878	5451

IN ALCUNI ESEMPLARI SI VEDANO LE SEGUENTI RETTIFICAZIONI:

Pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI
22	ult.	stempo	stesso tempo
23	25	altezza	altezze
26	4	ponti	punti
28	28	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
38 NE.	1	avessero	avesse o
46	10	deve	debbono
50 NE.	4	atrazione	attrazione.
60	28	25 84	25, 84
61	19	25 84	25, 84
63	7	20695	2069,5
71 NE.	15	s'adacquino di quattro in quattro giorni	s'adacquino nella ruota di quattro giorni
79	22	rettangolo AC	rettangolo AE
81	5	Larghezza OG = AC	Larghezza OG = $\frac{AC}{2}$

SUPPLEMENTO PRIMO

6	12	ative	relative
7	9	dimediata	dimidiata
28	12	*sa*	5*a*
30	4	*sb*	5.*b*

SUPPLEMENTO SECONDO

47	23	tang. (*a x*)	tang. (*a*+*x*)
49	ult.	2,73702	23,73702

60	ult.	convenute, e facendo -	convenute, facendo
62	ult.	PQ = PN.T - - - - -	PQ = $\frac{PN.T}{R}$
64	18	B = :: 3 : 5 - - - - -	B :: 3 : 5
68	18	per $\frac{o}{o}$ - - - - - - -	per cento
68	25	= V e - - - - - - -	= V, e
73	1	d competenza - - -	di competenza
73	21	dal valore - - - - -	del valore
74	8	troveremo - - - - -	troveremmo
76	18	dalle due - - - - -	delle due
79	14	§. 9. - - - - - - -	§. 8.

NELLE TAVOLE NUMERICHE SI DOVRANNO CORREGGERE I SEGUENTI PRODOTTI, O RADICI:

Altezze date.		Radici, o velocità.	Prodotto delle altezze nelle velocità.
1798	---	- - - - -	76240, 28834
once	punti		
2	11	1, 70782	- - - - -
4	9	- - - - -	10, 55238
5	3	2, 29129	- - - - -
9	8	- - - - -	30, 05489
10	6	3, 24037	- - - - -
11	7	3, 40343	- - - - -
12	1	3, 47611	- - - - -
12	8	3, 55903	- - - - -
16	7	- - - - -	67, 53171
18	3	4, 27200	- - - - -
26	---	- - - - -	132, 57451

Le ultime ciffre de' prodotti nella Tavola Once e Punti sono le più prossime al vero, essendo in origine, sì le radici, che i prodotti stati compilati con otto ciffre decimali, e ridotti solo a cinque.

INDICE

DE' CAPITOLI PIU' RIMARCABILI CONTENUTI NELL' OPERA.

CAPO I.

La quantità d'acqua corrente, che passa per una qualunque luce, o bocca regolata, o per una qualunque sezione, può misurarsi con misura assoluta, e relativa. Da che venga determinata generalmente una quantità d'acqua in qualunque sezione . . . . . pag. 1

CAPO II.

In qual maniera si debba calcolare la velocità delle acque correnti . . . . . „ 3

CAPO III.

Quale sia la curva, a cui terminano tutte le velocità, che ha l'acqua nell' uscire da una luce, o da qualunque sezione . . . . . „ 6

CAPO IV.

In qual maniera per mezzo delle Parabole, o de' Trapezj Parabolici, che sono il complesso, o la scala delle velocità, si possa computare la quantità d'acqua che passa per una sezione . . . . . „ 10

CAPO V.

Comporre una tavola chiamata Parabolica, assai comoda per calcolare le quantità dell' acqua . . . . . „ 12

CAPO VI.

Uso della Tavola Parabolica nella misura dell' acque correnti, che servono per irrigare i terreni . . pag. 15

CAPO VII.

Uso della Tavola Parabolica per misurare la quantità d'acqua di una luce, quando la velocità, di cui essa acqua è affetta, ha altra origine da quella della pressione dell' acqua sovrastante alla soglia della bocca . . . . „ 19

CAPO VIII.

Uso della Tavola Parabolica per calcolare le quantità d'acqua di quelle luci, che soffrono rigurgito . . „ 39

CAPO IX.

Uso della Tavola Parabolica per calcolare la quantità d'acqua d'una luce, quando si dubita, che dal declive dell' alveo inferiore a questa, venga l'acqua accelerata . „ 48

CAPO X.

Uso della Tavola Parabolica per calcolare la quantità d'acqua relativamente . . . . . . „ 54

CAPO XI.

Uso della Tavola Parabolica per calcolare la quantità d'acqua assolutamente . . . . . . „ 59

CAPO XII.

Quale quantità d' acqua richiedesi per adacquare una data quantità di terreno . . . . . . „ 69

CAPO XIII.

Delle bocche triangolari, e circolari . . . pag. 79

CAPO XIV.

Su gli accrescimenti o scemamenti d'acqua straordinarj,, 85

SUPPLEMENTO I.

Dimensioni delle once, o quadretti d'acqua di varie Provincie . . . . . ,, 1
Formola delle quantità d'acqua assolute, e relative che sgorgano per pressione da qualsivoglia luce rettangola ,, 2
Ragguaglio di varie misure col piede di Parigi . ,, 5
Delle quantità d'acqua relative . . . . . ,, 5
Quantità relative dell' oncia o quadretto d'acqua di varie Provincie a misura del loro braccio architettonico . ,, 6
Proporzione tra le quantità d'acqua scaricate dall' oncia milanese, e le scaricate dalle once, o quadretti d'altre Provincie . . . . . ,, 8
Delle quantità d'acqua assolute . . . . ,, 9
Quantità assolute dell' oncia, o quadretto d'acqua somministrate in 1" calcolate sul braccio di ciascuna Provincia in particolare . . . . . ,, 12
Formola generale per le quantità d'acqua che sgorgano da qualsivoglia sezione . . . . . ,, 13
Sezion lineare, e rettangolare . . . . ,, 14
Sezion triangolare . . . . . ,, 16
Sezioni Ellittiche, e Circolari . . . . ,, 18
Della velocità media . . . . . ,, 21
Degli elementi da cui dipende la grandezza dell' erogazione . . . . . ,, 24
Accelerazion prodotta dalla declività del letto . ,, 33
Bocche rigurgitate . . . . . ,, 35

SUPPLEMENTO SECONDO
DELL' INGEGNERE CARLO PAREA.

Parte prima . . . . . *pag.* 43
Problema I. . . . . . „ 43
Problema più generale del precedente . . . . „ 45
Esempio I. . . . . . „ 47
Esempio II. . . . . . „ 47
Parte seconda sulle Tavole poste in fine dell' opera . „ 49

METODO

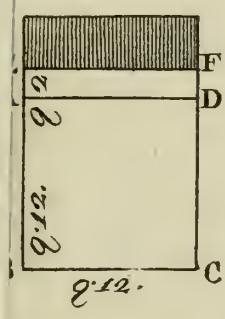
Per la soluzione delle questioni relative all' uso delle acque, specialmente nelle irrigazioni de' fondi regolate sugli orarj . . . . . „ 57

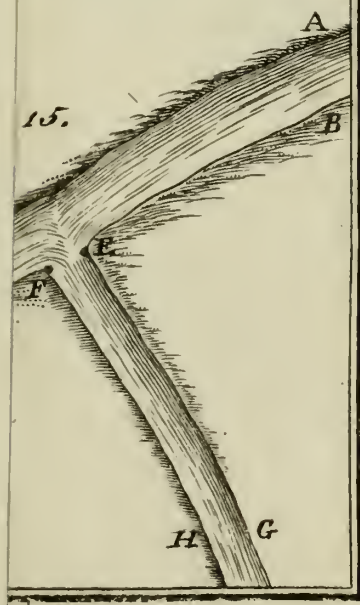
ERRORE

Alla pagina 59 de' Supplementi ove trovasi linea 13 il §. 8., leggasi §. 7.

La presente Edizione si pone sotto la salvaguardia della Legge, ed i contrafattori saranno citati dinanzi ai Tribunali. = Le consuete copie sono state deposte alla Biblioteca nazionale.

Fig. 6.





15.

Fig. 1.

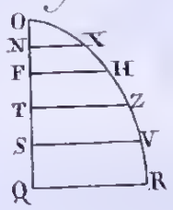


Fig. 2.

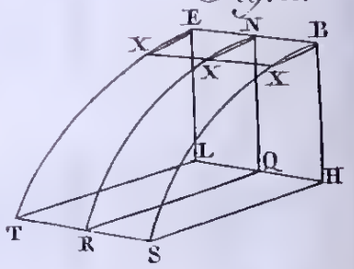


Fig. 3.

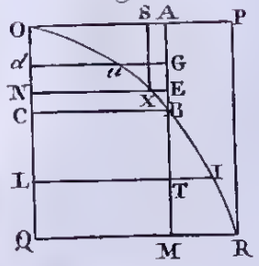


Fig. 4.

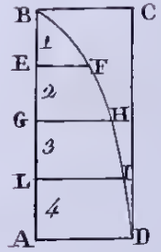


Fig. 5.

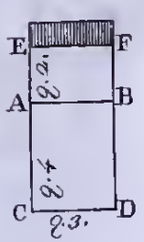


Fig. 6.

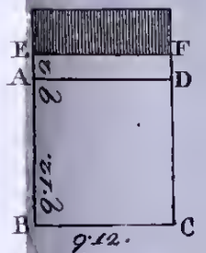


Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

M

Fig. 10.

Fig. 15.

Fig. 11.

Fig. 12.

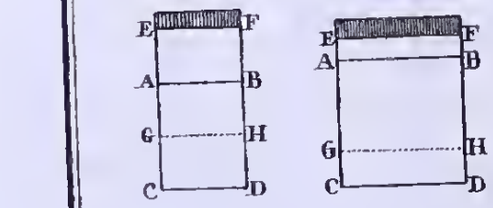


Fig. 13.

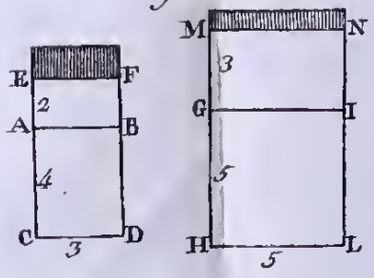


Fig. 14.

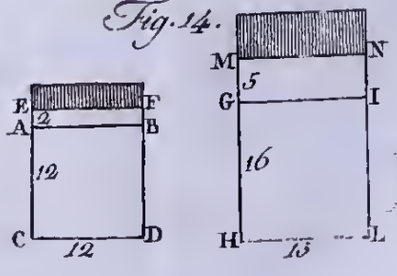


Fig. 16.

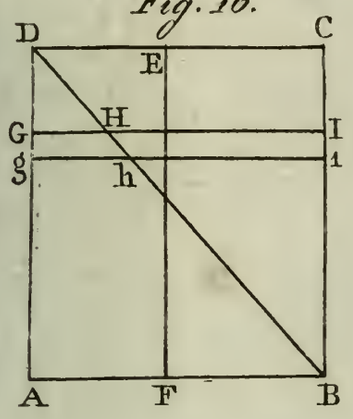


Fig. 17.

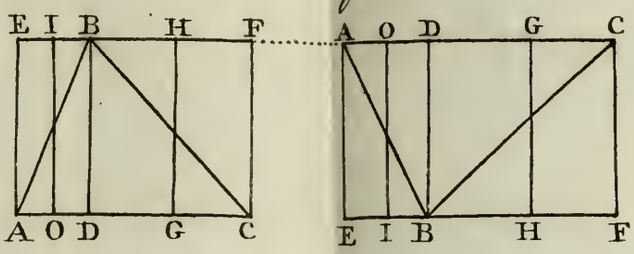


Fig. 18.

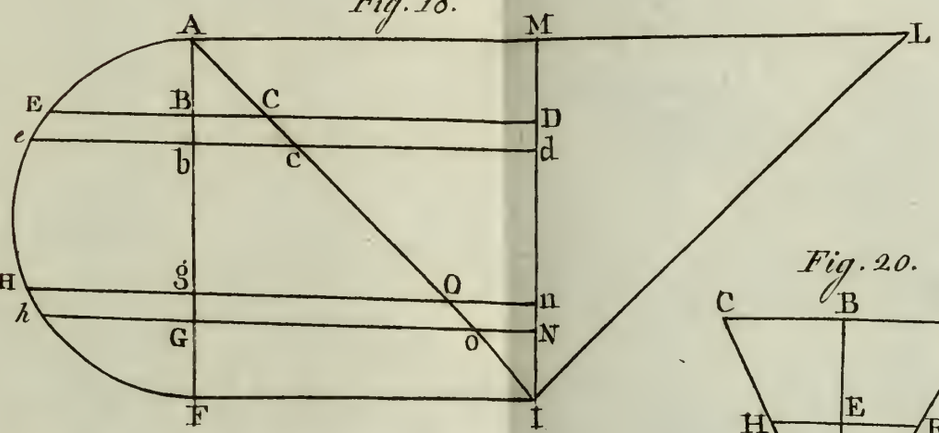


Fig. 19.

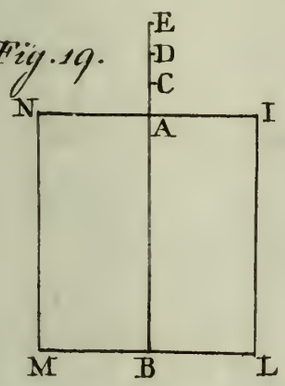
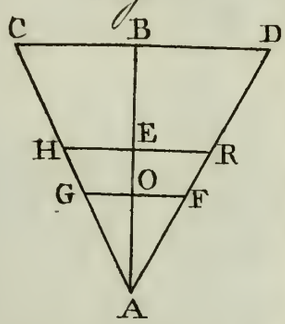


Fig. 20.



Suppl. P.°

Fig. 1.

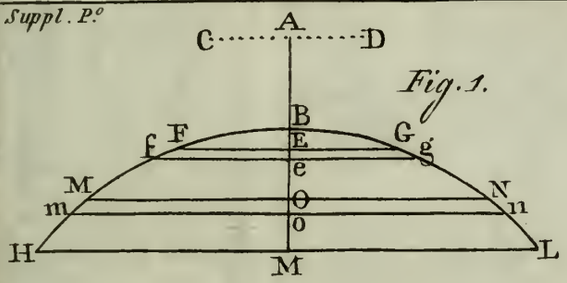


Fig. 2.

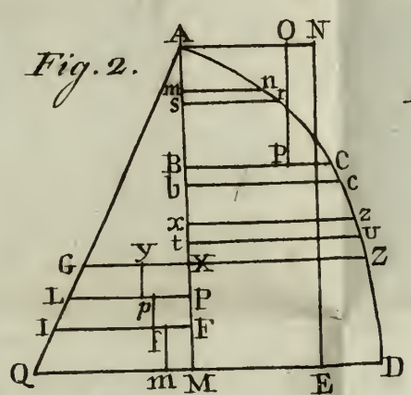
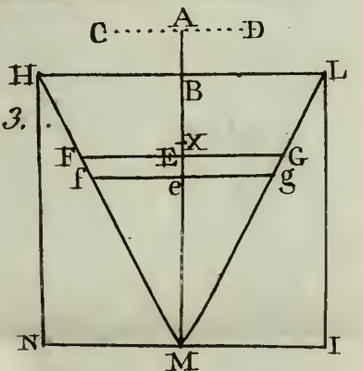


Fig. 3.



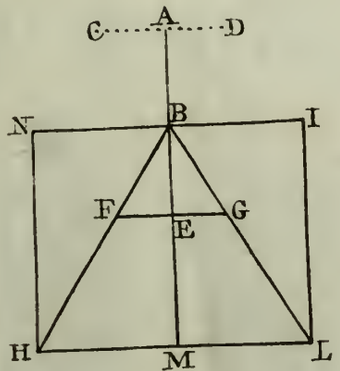


Fig. 4.

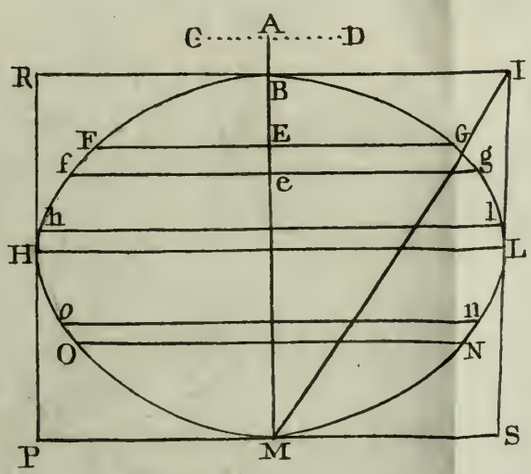
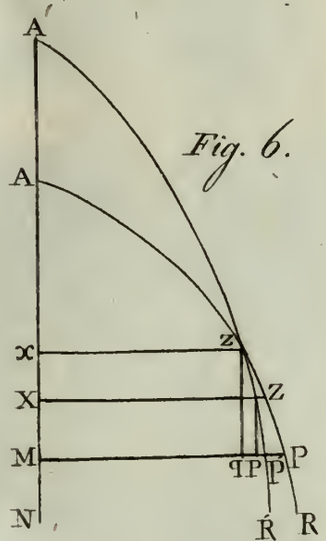
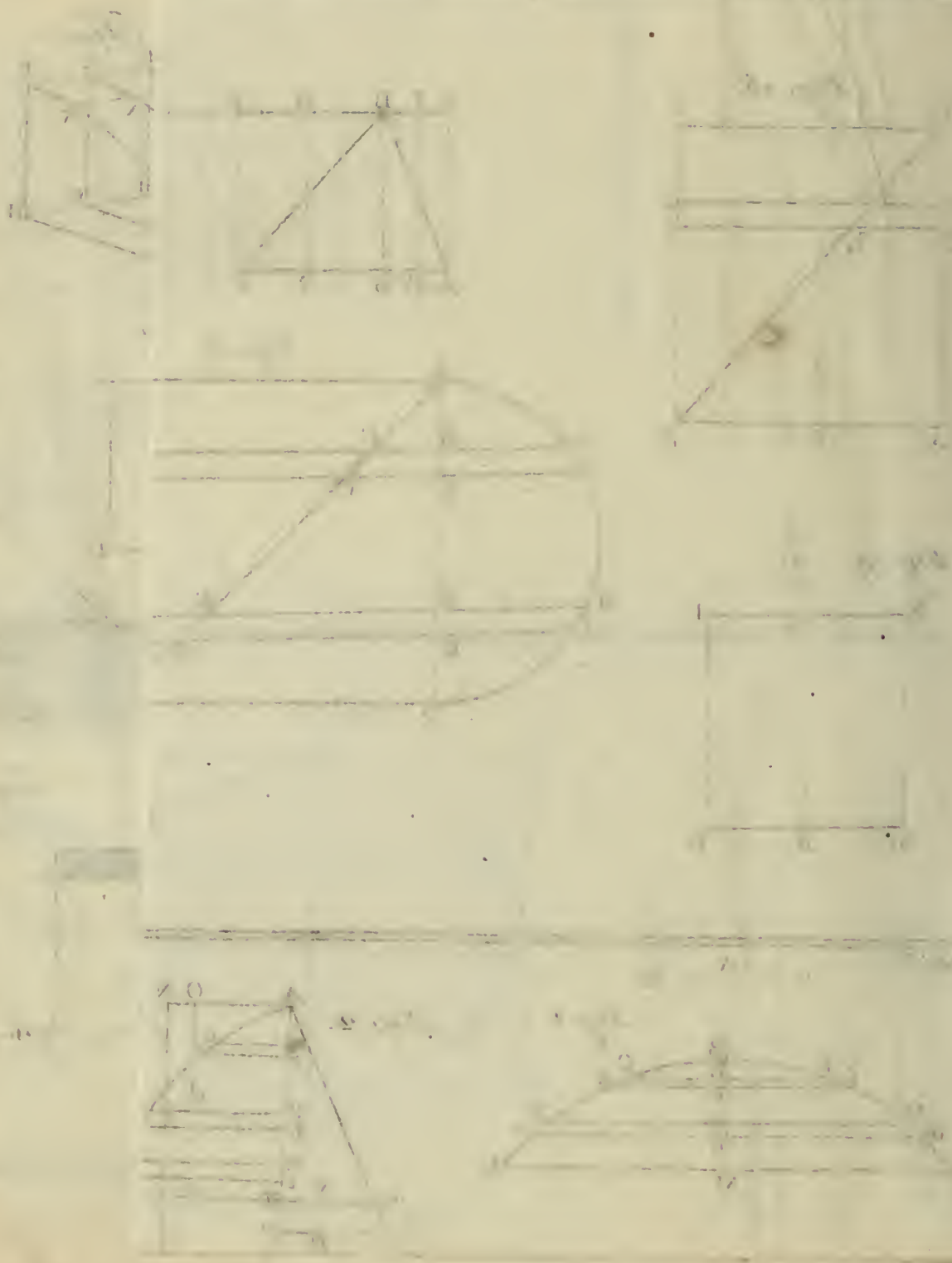


Fig. 5.

Fig. 6.





USO

DELLA

TAVOLA PARABOLICA

PER

LE BOCCHE D'IRRIGAZIONE

DEDICATA

AL VICE-PRESIDENTE

DELLA REPUBBLICA ITALIANA

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 057776319